

SÉRIE A,
N° 500
N° D'ORDRE
574

THESES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE TITRE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS
MENTION SCIENCES

Par Pierre SCHMITT

1^{ère} THESE. — AILES A FENTE — BIPLANS — INTERACTION-SOL —
CALCULS ET APPLICATIONS

2^{ème} THESE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

Soutenues le 20 JUIN 1950 devant la Commission d'examen

MM. H. VILLAT : *Président*

PERES
TOUSSAINT } *Examineurs*

O. N. E. R. A.
3, rue Léon Bonnat
PARIS XVIème

1950

SÉRIE A,
N° 500
N° D'ORDRE
524



THESES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE TITRE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS
MENTION SCIENCES

Par Pierre SCHMITT

1^{ère} THESE. — AILES A FENTE — BIPLANS — INTERACTION-SOL —
CALCULS ET APPLICATIONS

2^{ème} THESE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

Soutenues le 20 JUIN 1950 devant la Commission d'examen

MM. H. VILLAT : *Président*

PERES
TOUSSAINT } *Examineurs*

O. N. E. B. A.
3, rue Léon Bonnat
PARIS XVIème

1950

FACULTE DES SCIENCES DE L'UNIVERSITE DE PARIS

Doyen

M. A. CHATELET

PROFESSEURS

G. JULIA	T	Analyse supérieure et Algèbre supérieure	MONNIER	Physiologie générale
A. DENJOY	T	Théorie des Fonctions	PIVETEAU	T Géologie
L. LUTAUD	T	Géographie physique et Géologie dynamique	ROCARD	T Physique
E. DARMOIS	T	Enseignement de Physique	H. CARTAN	T Mathématiques générales
Robert LÉVY	T	Physiologie comparée	SCHAEFFER	T Physiologie des fonctions
Henri VILLAT	T	Mécanique des fluides et applications	LAFFITTE	T Chimie (P.C.B.)
Ch. JACOB	T	Géologie	FAVARD	Calcul des probabilités et Physique-Mathématique
P. PASCAL	T	Chimie générale	COULOMB	T Physique du Globe
Mme RAMART-LUCAS	T	Chimie organique	Melle COUSIN	T Biologie animale (P.C.B.)
FOCH	T	Mécanique physique et expérimentale	CHRETIEN	Chimie (P.C.B.)
PAUTHENIER	T	Electrotechnique générale	P. DRACH	Zoologie
DE BROGLIE	T	Théories physiques	KASTLER	Physique
JOB	T	Chimie générale	CHATELET	T Arithmétique et théorie des nombres
PRENANT	T	Anatomie et Histologie comparées	E. PHRUSSI	T Génétique
COMBES	T	Physiologie végétale	WURMSER	T Biologie physico-chimique
GARNIER	T	Géométrie supérieure	BAUER	T Chimie - Physique
PÈRES	T	Mécanique rationnelle	RIVIERE	Géologie (P.C.B.)
HACKSPILL	T	Chimie minérale	GAUTHERET	Biologie végétale (P.C.B.)
LAUGIER	T	Physiologie générale	LUCAS	Physique
TOUSSAINT	T	Technique aéronautique	A. THOMAS	Evolution des êtres organisés
M. CURIE	T	Physique (P.C.B.)	ARNULF	Optique appliquée
G. RIBAUD	T	Hautes températures	MAX MORAND	Physique
CHAZY	T	Mécanique analytique et Mécanique céleste	SOLEILLET	Physique
CROZE	T	Physique théorique et Physique céleste	FORTIER	T Mécanique expérimentale des fluides
DUPONT	T	Théories chimiques	DANJON	T Astronomie
VALIRON	T	Calcul différentiel et Calcul intégral	FROMAGEOT	Chimie biologique
BARRABÉ	T	Géologie structurale et Géologie appliquée	LAPORTE	Physique générale et Radioactivité
VAVON	T	Analyse et mesures chimiques	JANET	Mathématiques générales
G. DARMOIS	T	Calcul des probabilités et Physique mathématique	PETIT	T Biologie maritime
Jacques BOURCART	T	Géographie physique et Géologie dynamique	QUENEY	T Météorologie et dynamique atmosphérique
AUBEL	T	Chimie biologique	GALLIEN	Biologie animale (P.C.B.)
Mme JOLIOT-CURIE	T	Physique générale et Radioactivité	EICHHORN	Biologie végétale (P.C.B.)
PLANTEFOL	T	Botanique	DE CUGNAC	Biologie végétale (P.C.B.)
CABANNES	T	Recherches physiques	LAVAL	Physique (P.C.B.)
GRASSE	T	Evolution des êtres organisés	Melle CAUCHOIS	Chimie - Physique
PRÉVOST	T	Chimie organique	THELLIER	Physique du Globe
BOULIGAND	T	Application de l'analyse à la Géométrie	AUDUBERT	Electrochimie
CHAUDRON	T	Chimie appliquée	L'HÉRITIER	Génétique
WYART	T	Minéralogie	GRIVET	T Radio Electricité
TEISSIER	T	Zoologie	PONCIN	Mécanique des fluides
MANGENOT	T	Biologie végétale	THIRY	T Mécanique appliquée
P. AUGER	T	Physique quantique et relativité	DUBREIL	Mathématiques générales
			QUELET	Chimie (P.C.B.)
			CAGNIARD	Géophysique appliquée
			CHAMPETIER	Chimie appliquée
			CUVILLIER	Géologie structurale et Géologie appliquée
			JUNG	Pétrographie
			TRILLAT	Physique (P.C.B.)
			WIEMANN	Chimie (P.C.B.)

Secrétaire

Ch. MONIER



INTRODUCTION

La détermination de la forme prise par l'écoulement d'un fluide théorique autour du système constitué par deux profils d'aile d'allongement infini, est assez importante, puisqu'elle permet d'évaluer les caractéristiques et le comportement de ce système, placé en allongement fini dans un fluide réel.

La présente étude avait primitivement pour but de rassembler les documents déjà publiés sur ce sujet. Mais il est apparu bientôt que si certains cas classiques (*Écoulement autour de deux plaques ou autour de deux cercles*) avaient déjà été traités, en revanche, le cas particulier de l'écoulement autour de profils que l'on rencontre en aéronautique n'avait pas encore été étudié rigoureusement.

Cette nouvelle recherche ne paraissait pas, d'abord, très compliquée; elle a permis de vérifier avec une précision assez étonnante certains résultats expérimentaux concernant les problèmes du biplan et de "l'interaction-sol" et de déterminer le comportement expérimental de profils d'aile munis de bec de sécurité.

Toutefois ceci n'était qu'une partie du problème : En effet, les profils étudiés restaient, d'une part "théoriques" (*c'est-à-dire résultant de cercles par des transformations conformes simples*) et d'autre part, fixes l'un par rapport à l'autre dans chaque système. Du point de vue de l'aéronautique, le problème le plus important à résoudre était d'un autre ordre : il s'agissait de déterminer les caractéristiques théoriques d'un système de profils dont les cotes, plus ou moins empiriques, sont imposées par la structure de l'appareil sur lequel ils doivent être montés, et dont les positions relatives sont variables (*Dispositifs hypersustentateurs*). Ceci a fait l'objet d'une nouvelle recherche dont les résultats seront indiqués par la suite.

Ces remarques expliquent le plan du présent mémoire, qui se trouve divisé en deux parties principales :

Théorie
Exemples numériques

La première partie étudie l'écoulement autour de deux cercles, puis la transformation conforme de ces deux cercles en deux profils d'aile.

La seconde partie a pour but de rassembler les exemples numériques qui ont permis de confronter les résultats expérimentaux et la théorie dans tous les cas que celle-ci peut atteindre.

Quelques formules ont été mises en appendice, pour mémoire. Elles concernent la théorie des fonctions elliptiques et interviennent dans la première partie.

Je tiens à dire ici toute la gratitude et toute la reconnaissance que je dois à M. A. TOUSSAINT, Directeur de l'Institut Aérotechnique de Saint-Cyr, Professeur à la Sorbonne, qui a inspiré et guidé ces recherches, et qui m'a permis de travailler dans le calme pendant une époque troublée.

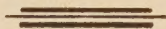
...

Qu'il me soit permis de remercier aussi

M.H. VILLAT, Membre de l'Institut, Directeur de l'Institut de Mécanique de Paris, pour l'appui et les conseils dont il a bien voulu m'honorer.

M.J. PERES, Membre de l'Institut, Professeur à la Sorbonne, dont l'enseignement m'a été si précieux.

C'est grâce à l'appui de l'Office National d'Etudes et de Recherches Aéronautiques que cette étude peut être aujourd'hui publiée.



CHAPITRE I

CALCUL DU POTENTIEL DE L'ÉCOULEMENT

AUTOUR DE DEUX CERCLES INÉGAUX

AVEC DES CIRCULATIONS DIFFÉRENTES



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41552427_0011

Chapitre I

CALCUL DU POTENTIEL DE L'ÉCOULEMENT AUTOUR DE DEUX CERCLES INÉGAUX AVEC DES CIRCULATIONS DIFFÉRENTES LA VITESSE GÉNÉRALE DU COURANT ÉTANT RECTILIGNE ET UNIFORME À L'INFINI.

I-1 - ÉCOULEMENT AUTOUR D'UN CERCLE.

I-11 - Rappel succinct de la théorie générale.

Nous rappellerons d'abord quelques généralités, du reste tout à fait classiques maintenant, sur l'écoulement autour d'un cercle, et en particulier la méthode des images. (Voir la figure I-1 page 5).

On admet ⁽¹⁾ que les composantes de la vitesse d'un écoulement plan (à deux dimensions) pour un fluide idéal (c'est-à-dire un fluide parfait, en particulier sans compressibilité et sans viscosité, que nous considérerons toujours ici), dépendent d'un potentiel $\varphi(x, y)$ tel que

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

D'autre part, au moyen de lois générales établies d'après les considérations précédentes (fluide parfait) on établit que l'équation différentielle des lignes de courant

$$\frac{v}{dy} = \frac{u}{dx} \quad \text{qui peut s'écrire encore}$$

$$v dx - u dy = 0$$

donne sous cette seconde forme une différentielle exacte $d\psi$ d'une fonction $\psi(x, y)$.

On a donc :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} = u \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = v$$

Ces deux fonctions $\varphi(x, y)$ et $\psi(x, y)$ étant harmoniques conjuguées, peuvent former, l'une la partie réelle, l'autre la partie imaginaire d'une fonction $f(z)$ de la variable complexe $z = x + iy$. On pose :

$$f(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$$

Cette fonction $f(z)$ est appelée potentiel complexe et sa dérivée :

$$\frac{df}{dz} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} = u - iv$$

(1)- Carafoli : Recherches expérimentales sur les ailes monoplanes. Publications Scientifiques et Techniques du Ministère de l'Air N° 8 - 1932.

Inversement, si l'on se donne une fonction de variable complexe $F(z)$, la séparation des parties réelle et imaginaire : $F(z) = \Phi + i\Psi$ nous fournira deux fonctions imaginaires conjuguées, la première pouvant servir de potentiel des vitesses d'un écoulement et l'autre de fonction de courant (chaque valeur constante de Ψ donnant l'équation d'une ligne de courant).

1-12 - Écoulement autour d'un cercle.

En particulier, nous allons vérifier que le potentiel

$$f(z) = -\frac{i\Gamma}{2\pi} \log(z-z_0) + V_0 e^{i\alpha} (z-z_0) + \frac{V_0 R^2 e^{-i\alpha}}{z-z_0} + C \quad (17)$$

correspond à un écoulement autour d'un cercle de rayon R centré au point $z = z_0$, avec la circulation Γ (que nous définirons par la suite), la vitesse générale de l'écoulement à l'infini ayant comme module V_0 et sa direction faisant l'angle $-\alpha$ avec l'axe des x .

D'après ce que nous venons de voir, il suffit de vérifier, du moins en ce qui concerne le contour du cercle en question, qu'il est bien une ligne de courant, c'est-à-dire qu'il y a bien une valeur particulière constante c_1 qui, égale à la partie imaginaire Ψ de la fonction $f(z)$ fournit l'équation d'une telle ligne de courant. Pour cela nous pouvons décomposer le potentiel $f(z)$ en deux parties :

$$1^\circ : \quad f_1(z) = -\frac{i\Gamma}{2\pi} \log(z-z_0) + C$$

$$\text{D'où} \quad \Psi_1(x, y) = -\frac{\Gamma}{2\pi} \log r + B$$

$$\text{en posant :} \quad (z-z_0) = re^{i\theta} \quad \text{et} \quad C = A + iB$$

Il est bien évident que, quelle que soit la valeur constante donnée à Ψ_1 , il correspondra une valeur constante pour $-\frac{\Gamma}{2\pi} \log r$ et par conséquent une valeur constante pour B . Si par exemple on fait $\Psi_1 = B_1$ on aura :

$$r = e^{-\frac{2\pi(B_1-B)}{\Gamma}}$$

Par conséquent pour chaque valeur B_1 de Ψ_1 nous aurons comme ligne de courant un cercle centré en z_0 et de rayon

$$r = e^{-\frac{2\pi(B_1-B)}{\Gamma}}$$

On voit que la vitesse d'un tel écoulement est :

$$w = -\frac{i\Gamma}{2\pi} \frac{1}{re^{-i\theta}}$$

tangente au cercle de rayon r .

La circulation, c'est-à-dire la quantité :

$$\int_0^{2\pi} v \cdot ds = \int_0^{2\pi} \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{1}{r} r d\theta = \Gamma$$

est la même pour tous les cercles-lignes de courant et pour tout contour fermé entourant le point z .

Il y a donc toujours une valeur particulière de B_1 telle que le cercle de rayon R soit une ligne de courant.

$$2^\circ \quad f_2(z) = V_0 e^{i\alpha(z-z_0)} + \frac{V_0 R^2 e^{-i\alpha}}{(z-z_0)}$$

Avec les notations déjà employées nous pouvons écrire cette seconde partie du potentiel :

$$f_2(z) = V_0 \left[r e^{i(\alpha+\theta)} + \frac{R^2}{r} e^{-i(\alpha+\theta)} \right]$$

Si nous faisons maintenant $r = R$, c'est-à-dire si nous nous plaçons sur le contour du cercle, $f_2(z)$ devient

$$f_2(z)_{z=R} = V_0 R e^{i\theta} + V_0 R e^{-i\theta} = 2 V_0 R \cos \theta$$

Donc la partie imaginaire ψ_2 de $f_2(z)$ devient constamment nulle sur le contour du cercle. Le cercle est encore ligne de courant dans ce second écoulement.

En superposant les deux écoulements dus aux deux potentiels $f_1(z)$ et $f_2(z)$ on voit bien que le cercle sera encore une ligne de courant dans l'écoulement dû au potentiel $f(z)$.

D'autre part la vitesse complexe est :

$$\frac{df}{dz} = -\frac{i\Gamma}{2\pi} \frac{1}{z-z_0} + V_0 e^{i\alpha} - \frac{V_0 R^2 e^{-i\alpha}}{(z-z_0)^2}$$

A l'infini on aura évidemment :

$$\frac{df}{dz}_{(z=\infty)} = V_0 e^{i\alpha}$$

La vitesse générale de l'écoulement est donc bien à l'infini $V_0 e^{i\alpha}$ ce qu'il fallait montrer.

Notons enfin que le potentiel (17) est composé de trois éléments : le premier étant le potentiel d'un écoulement rectiligne $\left[V_0 e^{i\alpha(z-z_0)} \right]$ le second celui d'un tourbillon $\left[-\frac{i\Gamma}{2\pi} \log(z-z_0) \right]$ et le troisième celui d'un doublet

$$\left[V_0 R^2 e^{i\alpha} \frac{1}{z-z_0} \right].$$

Pris seul ce potentiel donne comme lignes de courant un faisceau de cercles tangents au point z_0 à l'axe de symétrie perpendiculaires à la ligne des centres faisant l'angle $-\alpha$ avec l'axe réel.

Naturellement tout ceci est fictif, l'écoulement défini par le potentiel $f(z)$ existe aussi bien à l'intérieur du cercle qu'à l'extérieur. Mais le cercle étant une ligne de courant fermée, on suppose dans la théorie que l'écoulement se produit à l'extérieur exactement de la même façon que si le cercle était un véritable obstacle. D'une manière générale nous confondrons dans le texte le

contour de l'obstacle avec la ligne de courant qui le dessine, sans nous préoccuper de l'écoulement à l'intérieur.

I-13 - La méthode des images.

1-131 - IMAGE D'UN TOURBILLON.

On peut se demander de quelle façon il faudra modifier le potentiel $f(z)$ de la formule (17) lorsqu'il y viendra s'ajouter pour l'écoulement à l'extérieur du cercle une singularité (c'est-à-dire un doublet ou un tourbillon) en un point quelconque. Ce sont des problèmes de ce genre qui nous occuperont par la suite. Soit par exemple le potentiel précédent (formule 17) augmenté d'un tourbillon de circulation Γ_1 placé en un point z_1 extérieur au cercle de rayon R . Le potentiel actuel s'écrit d'après ce que nous venons de voir :

$$f_3(z) = V_0 e^{i\alpha(z-z_0)} + \frac{V_0 R^2 e^{-i\alpha}}{(z-z_0)} - \frac{i\Gamma}{2\pi} \log(z-z_0) - \frac{i\Gamma_1}{2\pi} \log(z-z_1) \quad (18)$$

à une constante additive près, sans importance ici.

Il est bien évident que pour ce potentiel $f_3(z)$ le cercle de rayon R n'est plus ligne de courant (Voir figure I-I page 5).

Par contre si nous envisageons d'ajouter un autre tourbillon de circulation Γ_1 placé en point z'_1 intérieur au cercle et inverse géométriquement par rapport au cercle du point z_1 nous aurons un nouveau potentiel :

$$f_4(z) = f(z) - \frac{i\Gamma_1}{2\pi} \log \frac{z - z_1}{z - z'_1}$$

La partie imaginaire de ce potentiel est :

$$\psi_4 = \psi - \frac{\Gamma_1}{2\pi} \log \left| \frac{z - z_1}{z - z'_1} \right|$$

En ce qui concerne ψ nous savons qu'il y a une valeur particulière constante qui fournit l'équation du cercle comme ligne de courant.

Pour la seconde partie :

$$\psi_4 - \psi = - \frac{\Gamma_1}{2\pi} \log \left| \frac{z - z_1}{z - z'_1} \right|$$

les valeurs constantes seront donc telles que le rapport des distances d'un point z aux deux centres z_1 et z'_1 reste constant, ce sont les cercles du faisceau dont les points limites sont z_1 et z'_1 (1). En particulier le cercle de rayon R est d'après la construction même, l'un de ces cercles. Le potentiel $f_4(z)$ donne donc une solution acceptable en ce qui concerne le contour. Il a, par contre, le désavantage d'ajouter la circulation $(-\Gamma_1)$ autour du cercle. Pour supprimer cette dernière, il suffit d'ajouter un nouveau tourbillon au centre du cercle, de circulation $(+\Gamma_1)$

(1) - PERES - Mécanique des Fluides, chapitre 3.

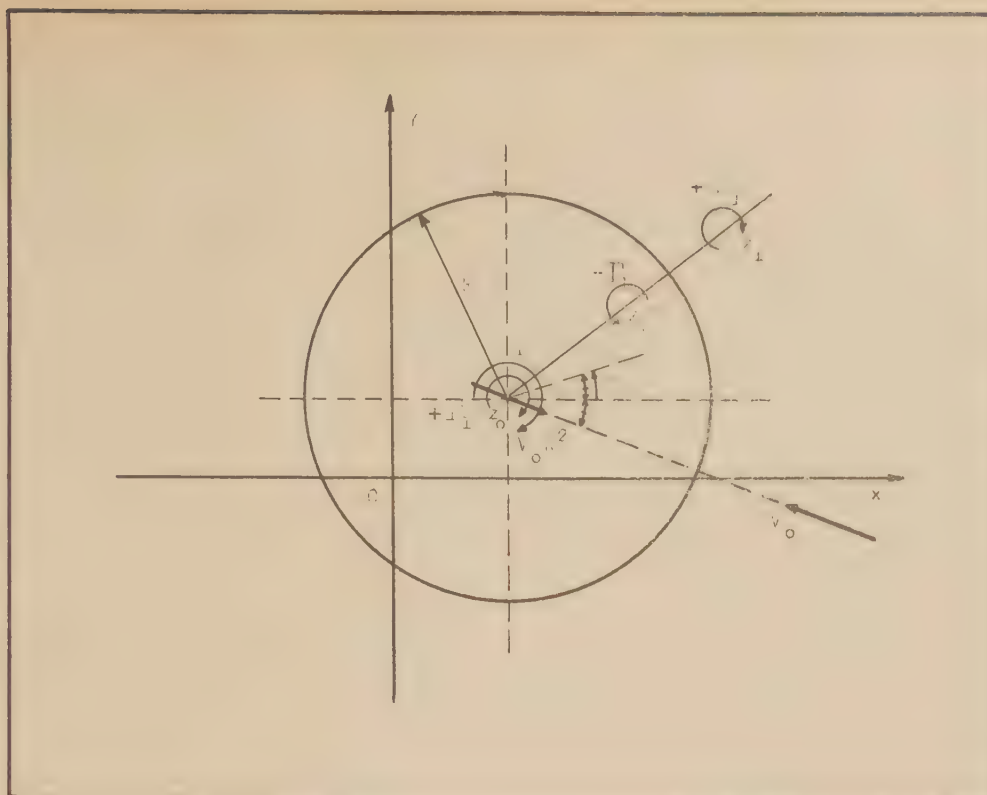


Fig. 1-1

Au total le potentiel de l'écoulement autour d'un cercle de rayon R centré en z_0 , avec une vitesse constante à l'infini et troublé par un tourbillon extérieur placé en un point z_1 et de circulation $(+\Gamma_1)$ s'écrit :

$$f_5(z) = V_0 e^{i\alpha} (z - z_0) + \frac{V_0 R^2 e^{-i\alpha}}{z - z_0} - \frac{i\Gamma_1}{2\pi} \log(z - z_0) - \frac{i\Gamma_1}{2\pi} \log \frac{(z - z_0)(z - z_1)}{(z - z'_1)}$$

Le tourbillon de circulation $(-\Gamma_1)$ placé au point z'_1 est dit l'image du tourbillon Γ_1 placé au point z_1 .

1.132 - IMAGE D'UN DOUBLET.

De même, supposons le potentiel de la formule (17) augmenté du potentiel d'un doublet extérieur au cercle. Sans diminuer la généralité de la question nous supposons de plus que ce doublet est sur l'axe réel, de même que le centre du cercle. Le potentiel ainsi formé s'écrit alors :

$$f_6(z) = V_0 e^{i\alpha} (z - z_0) + \frac{V_0 R^2 e^{-i\alpha}}{z - z_0} - \frac{i\Gamma_1}{2\pi} \log(z - z_0) + \frac{me^{i\beta}}{z - z_1} + C \quad (19)$$

z_0 et z_1 étant des quantités réelles.

Nous dirons encore que l'image de ce doublet par rapport au cercle, nécessaire pour que celui-ci soit encore une ligne de courant dans l'écoulement perturbé, est un autre doublet, intérieur au cercle, placé sur la droite $z_0 z_1$ en un point z'_1 tel que :

$$z, z'_1 = \frac{R^2}{z_0 z_1}$$

ant l'intensité n est égale à l'intensité m du doublet réel, multipliée par $\frac{z_0 z'_1}{z_0 z_1}$ c'est-à-dire par $\frac{R^2}{z_0 z_1^2}$, et dont l'axe est symétrique (*direction*), par rapport à la tangente au cercle qui passe par le point d'intersection de celui-ci avec la droite $z_0 z_1$, de l'axe du doublet réel (voir figure 1-2 page 7).

Nous avons vu déjà que les trois premiers termes du potentiel de la formule (19) fournissaient à eux seuls, en particulier, une ligne de courant qui suivait le contour du cercle. Nous n'avons donc, pour vérifier la proposition précédente, qu'à prouver que les deux doublets ci-dessus (*réel et image*) donnent bien eux aussi une ligne de courant qui soit le cercle. Or, le potentiel dû à ces deux doublets s'écrit avec les notations précédentes :

$$f_7(z) = \frac{me^{i\beta}}{z-z_1} + \frac{me^{i(\pi-\beta)}}{z-z'_1} \frac{R^2}{z_0 z_1^2}$$

et avec les notations de la figure (page 7) lorsque l'on se place sur le cercle :

$$f_7(z) = \frac{me^{i\beta}}{ae^{iu}} - \frac{me^{-i\beta}}{ae^{iu} \frac{R}{b}} \frac{R^2}{b^2} \quad (20)$$

en posant $a e^{iu} = z - z_1$ et $b = z_1 - z_0$ et à cause du fait suivant : Les deux points z_1 et z'_1 étant inverses l'un de l'autre par rapport au cercle, le rapport des distances d'un point z du cercle à ces deux points est constant. En particulier, on a :

$$\frac{z'_1 z}{z_1 z} = \frac{z'_1 z}{a} = \frac{z'_1 R}{z_1 R} = \frac{z'_1 b}{z_1 b} = \frac{R}{R+b} = \frac{R}{b}$$

$$z'_1 z = \frac{aR}{b} \quad \text{et} \quad z - z_1 = \frac{a}{b} e^{iu}$$

On a d'autre part avec les notations de la figure :

$$Rz = \sin v R \quad \text{et} \quad \frac{Rz}{z_1 z} = \sin u = \frac{R \sin v}{a} \quad \text{d'où} \quad a = \frac{R \sin v}{\sin u}$$

$$b = z_0 R + Rz_1 = R \cos v \quad a \cos u = R \cos v - \frac{\sin v \cos u}{\sin v}$$

$$= \frac{R(\cos v \sin u - \sin v \cos u)}{\sin u} = \frac{R \sin(u-v)}{\sin u}$$

La formule (20) peut donc s'écrire sur le cercle

$$f_7(z) = \frac{\pi \sin u}{R \sin v} \left[e^{i(\beta-u)} - e^{-i(\beta+u)} \frac{\sin u}{\sin(u-v)} \right]$$

La partie imaginaire de ce potentiel (*équation des lignes de courant*) est :

$$\Psi_{7(\text{cercle})} = \frac{\pi \sin u}{R \sin v} \left[\sin(\beta-u) + \frac{\sin(\beta+u) \sin u}{\sin(u-v)} \right]$$

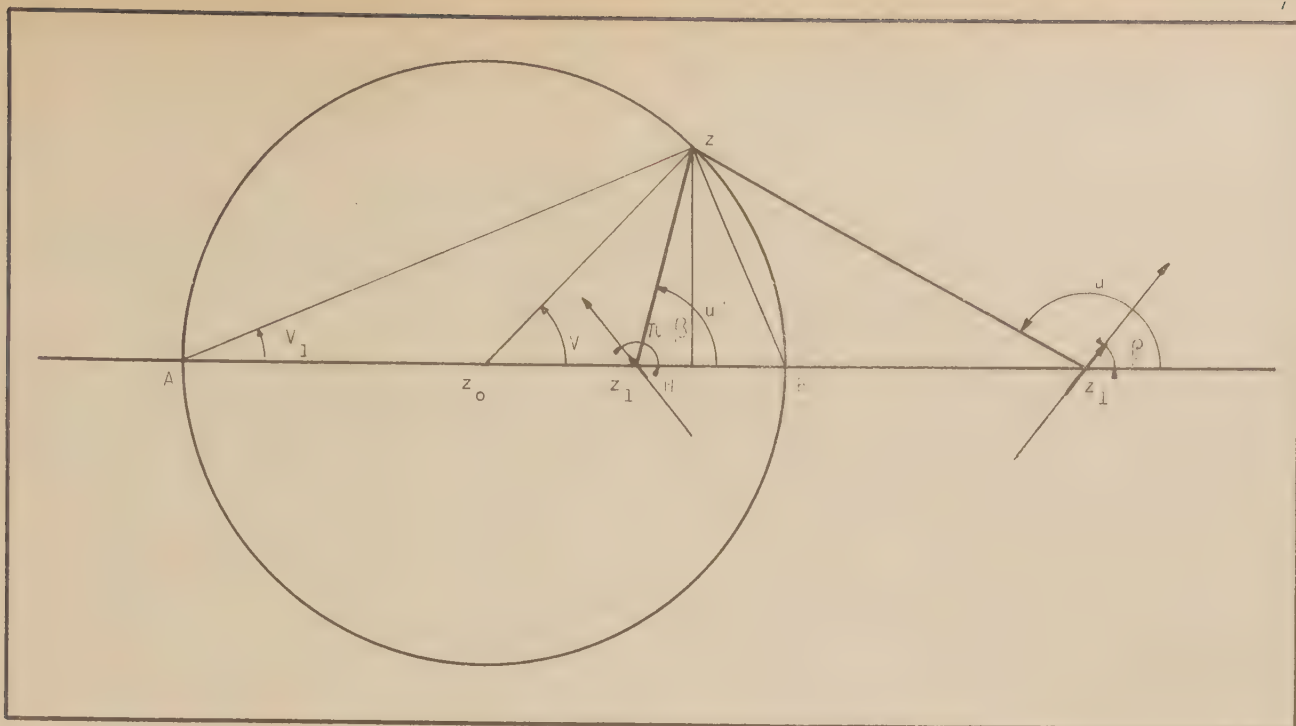


Fig. 1-2

Or les droites zA et zB sont les bissectrices de l'angle $\widehat{z'_1 z z_1}$; on a donc :

$$u + u' = \pi + v$$

soit :

$$u - v = \pi - u' \quad \text{et} \quad \sin(u-v) = \sin u'$$

Donc :

$$\begin{aligned} \psi_{7(\text{cercle})} &= \frac{m \sin u}{R \sin v} \left[\sin(\beta - u) + \frac{\sin(\beta + u') \sin u}{\sin u'} \right] \\ &= \frac{m \sin u}{R \sin v} \left[\sin \beta \cos u - \sin u \cos \beta + \frac{\sin \beta \cos u' \sin u}{\sin u'} + \frac{\cos \beta \sin u' \sin u}{\sin u'} \right] \\ &= \frac{m \sin u}{R \sin v} \left[\frac{\sin \beta \cos u \sin u' + \sin \beta \cos u' \sin u}{\sin u'} \right] \\ &= \frac{m \sin u}{R \sin v} \frac{\sin \beta}{\sin u'} (\cos u \sin u' + \cos u' \sin u) = \frac{m \sin u \sin \beta \sin(u+u')}{R \sin v \sin u} \\ &= \frac{m \sin \beta}{R} \frac{\sin u}{\sin u'} \frac{\sin(\pi + v)}{\sin v} = - \frac{m \sin \beta \sin u}{R \sin u'} = - \frac{m \sin \beta}{R} \frac{z - z_1}{z_1 z} = - \frac{m \sin \beta}{b} \end{aligned}$$

Ainsi, sur le cercle, la partie imaginaire du potentiel est constante, ce qui est suffisant pour démontrer ce que nous avons en vue. Le potentiel total de l'écoulement autour d'un cercle avec une vitesse rectiligne et uniforme à l'infini et perturbé par un doublet extérieur, s'écrit donc :

$$f_7(z) = V_0 e^{i\alpha} (z - z_0) + \frac{V_0 z^2 e^{-i\alpha}}{z - z_0} + \frac{i\Gamma}{2\pi} \log(z - z_0) + \frac{me^{i\beta}}{z - z_1} + \frac{me^{i(\pi - \beta)}}{z - z_1} - \frac{R^2}{z_0 z_1^2}$$

1-2 - ÉCOULEMENT AUTOUR DE DEUX CERCLES.

1-21 - Généralités.

Les écoulements autour d'un cercle, que nous avons vus dans la première partie de ce chapitre, sont, comme nous l'avons déjà indiqué, tout à fait classiques. Par contre, l'écoulement autour de deux cercles n'a pas encore été traité directement d'une manière complète, à notre connaissance, par les auteurs qui sont venus à ce sujet pour des raisons diverses.

Par exemple M.P. DUPONT en France, a montré dans différents mémoires (1) comment on pouvait construire le système de remplacement (composé de doublets et de tourbillons) de deux cercles extérieurs l'un à l'autre, placés dans un courant de vitesse rectiligne et uniforme, mais il n'a pu aboutir "in fine" faute de notations assez simplifiées à l'établissement du potentiel d'un tel écoulement.

Au contraire, M.H. VILLAT (2) au cours de problèmes beaucoup plus compliqués et de forme beaucoup plus générale, traite incidemment le cas de l'écoulement à l'intérieur d'une couronne formée de deux cercles concentriques, sur lequel nous reviendrons par la suite, mais que nous n'avons pu employer ici, dans le cas particulier qui nous intéresse, à cause justement de sa très grande généralité.

En Pologne, MM. J. BONDER et MULLER (3) ont traité le même problème que M.P. DUPONT avec, semble-t-il, des notations qui leur permettraient d'établir un potentiel, mais sans aborder le seul cas qui soit vraiment intéressant de l'écoulement autour de deux cercles avec portance c'est-à-dire sans faire intervenir les tourbillons dans le problème.

Enfin, en Allemagne, M. LAGALLY (4) a donné le potentiel de l'écoulement autour de deux cercles quelconques, avec portance, mais non directement dans le plan des cercles. Nous y reviendrons, parce que le potentiel permet des calculs numériques relativement aisés sur les cas pratiques qui nous intéresseront dans la suite, mais l'inconvénient de telles formules est qu'elles ne permettent pas de voir, si l'on peut dire "matériellement", leur fabrication. Nous allons donc indiquer dans les pages suivantes une méthode, directement inspirée de celle de M. DUPONT quant à la construction du système de remplacement et de celle de M. LAGALLY quant aux notations, pour aboutir finalement à un potentiel, dans le plan des cercles, de l'écoulement avec une vitesse rectiligne et uniforme à l'infini autour de deux cercles de rayon quelconque et affectés de circulations différentes.

Le principe, très simple, de la méthode est le suivant : (5)

Supposons dans un plan z , deux cercles K_1 et K_2 extérieurs l'un à l'autre, respectivement de rayon R_1 et R_2 . Nous cherchons le potentiel de l'écoulement dont la vitesse à l'infini reste rectiligne et uniforme, autour de ces deux cercles lorsqu'ils sont affectés respectivement des circulations Γ_1 et Γ_2 . Si chacun de ces cercles était seul, il suffirait pour respecter le contour de le remplacer dans l'écoulement, par un doublet et un tourbillon de circulation convenable, placés au centre. Supposons alors que nous remplaçons les deux cercles par leurs "singularités de remplacement" comme s'ils étaient seuls, séparément dans l'écoulement rectiligne. Le potentiel serait composé :

(1)- DUPONT - IV^e Congrès de Navig. Aérienne - Rome 1927 - et Comptes Rendus du Congrès "Mécanique - Aérodynamique".

(2)- VILLAT - Voir par exemple : Leçons sur l'Hydrodynamique

(3)- J. BONDER et MULLER - Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik 1928.

(4)- LAGALLY - Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik 1929- p.299.

(5)- On trouvera un exposé très complet de cette méthode dans une note de M.P. DUPONT.

- 1°) - D'une partie concernant seulement cet écoulement rectiligne
 2°) - D'un doublet et d'un tourbillon que nous appellerons D_1 et Γ_1 placés au centre du cercle K_1 .
 3°) - D'un doublet et d'un tourbillon (D_2 et Γ_2) au centre du cercle K_2

Mais D_2 et Γ_2 sont extérieurs à K_1 . D'après la méthode que nous venons de voir au paragraphe précédent, pour que le contour de K_1 soit encore respecté, il faut prendre les "images" de D_2 et de Γ_2 par rapport à ce cercle. Ces images (D_2' et Γ_2') seront intérieures à K_1 , mais par conséquent, extérieures à K_2 . Pour respecter de nouveau, dans l'écoulement perturbé par D_2' et Γ_2' , le contour de K_2 , il faudra prendre les images de ces singularités par rapport à ce cercle: ces images lui seront intérieures, et par conséquent extérieures à K_1 etc. On peut faire le même raisonnement pour les singularités D_1 et Γ_1 . On conçoit alors que le système de remplacement des deux cercles est formé de deux suites infinies de doublets et de tourbillons, images réfléchies alternativement dans les deux cercles. Notons ici que ces deux suites de singularités ne modifient pas la vitesse de l'écoulement à l'infini.

Avant de montrer comment on peut écrire le potentiel correspondant, nous allons voir quelques notations particulières au problème de deux cercles dans un plan.

1-22 - Coordonnées Bipolaires.

En général, on définit deux cercles K_1 et K_2 d'un plan par la position de leur centre (O_1 et O_2), la distance (d) de ces centres et le rayon (R_1 et R_2) des deux cercles. Nous serons conduits, dans la suite de cet exposé, à calculer un autre mode de définition, à partir des données précédentes. En effet prenons comme axe réel du plan z l'axe qui passe par les deux centres O_1 et O_2 . Les deux cercles peuvent être considérés comme faisant partie d'un faisceau. Ce dernier possède alors deux points limites Q_1 et Q_2 , l'un intérieur à K_1 , l'autre à K_2 et situés tous les deux sur l'axe réel. Nous prendrons comme axe imaginaire la médiatrice du segment Q_1Q_2 , les points Q_1 et Q_2 étant distants d'une longueur $2c$. On sait que, par définition, le rapport des distances (r_1/r_2 , voir figure 1-3 page 11) d'un point quelconque de K_1 aux deux points Q_1 et Q_2 est constant.

Posons alors :

$$\text{Pour } K_1 : \frac{r_2}{r_1} = \lambda \quad \text{et} \quad \log \lambda = \alpha$$

De même posons :

$$\text{Pour } K_2 : \frac{r_2}{r_1} = \mu \quad \text{et} \quad \log \mu = \beta$$

les logarithmes étant naturellement de base e . Dans le cas de figure le rapport r_2/r_1 est plus grand que 1 pour le cercle K_1 . Il est donc inférieur à 1 pour le cercle K_2 , et, ainsi, β est une quantité positive. Quoiqu'il en soit, on voit que les deux cercles K_1 et K_2 peuvent être définis par les deux points Q_1 et Q_2 , la distance de ceux-ci et les deux valeurs α et β . Nous allons montrer quelles sont les équations qui relient cette seconde définition à la première.

Pour le cercle K_1 et dans le cas de la figure on a :

$$\frac{r_2}{r_1} = e^\alpha = \frac{\sqrt{(x+c)^2 + y^2}}{\sqrt{(x-c)^2 + y^2}}$$

d'où l'on tire sans difficulté :

$$x^2 + y^2 + c^2 - 2cx \coth \alpha = 0$$

Ceci est bien l'équation d'un cercle (centré sur l'axe des x) de rayon

$$\left. \begin{aligned} R_1 &= \sqrt{c^2 \coth^2 \alpha - c^2} = \frac{c}{\operatorname{sh} \alpha} \\ a_1 &= c \coth \alpha \end{aligned} \right\} \quad (21) \quad \text{et dont la distance à l'origine est :}$$

De même l'abscisse du centre de K_2 est :

$$\left. \begin{aligned} a_2 &= -c \coth \beta \\ R_2 &= \sqrt{c^2 \coth^2 \beta - c^2} = \frac{c}{\operatorname{sh} \beta} \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

et son rayon :

et l'on a :

$$d = a_1 + a_2 = c (\coth \beta + \coth \alpha) \quad (23)$$

Ces trois équations permettent de passer de la seconde définition à la première, mais l'on a aussi :

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}(\alpha + \beta) &= \operatorname{ch} \alpha \operatorname{ch} \beta + \operatorname{sh} \alpha \operatorname{sh} \beta = c^2 (2 \coth \alpha \coth \beta + 2) \frac{\operatorname{sh} \alpha \operatorname{sh} \beta}{2 c^2} \\ &= \frac{\operatorname{sh} \alpha \operatorname{sh} \beta}{2 c^2} \left\{ c^2 (\coth \alpha + \coth \beta)^2 + 2 c^2 - c^2 \coth^2 \alpha - c^2 \coth^2 \beta \right\} \\ &= \frac{\operatorname{sh} \alpha \operatorname{sh} \beta}{2 c^2} \left\{ [c (\coth \alpha + \coth \beta)]^2 - \frac{c^2}{\operatorname{sh}^2 \alpha} - \frac{c^2}{\operatorname{sh}^2 \beta} \right\} \\ &= \frac{1}{2 R_1 R_2} \left\{ d^2 - R_1^2 - R_2^2 \right\} = \frac{d^2 - R_1^2 - R_2^2}{2 R_1 R_2} \end{aligned} \quad (24)$$

puis $\operatorname{sh} \alpha = \frac{R_2}{d} \operatorname{sh}(\alpha + \beta)$ puisque cela peut s'écrire :

$$\operatorname{sh} \alpha = \frac{\operatorname{sh}(\alpha + \beta)}{\operatorname{sh} \beta (\coth \alpha + \coth \beta)} = \frac{\operatorname{sh}(\alpha + \beta) \operatorname{sh} \alpha \operatorname{sh} \beta}{\operatorname{sh} \beta (\operatorname{ch} \alpha \operatorname{sh} \beta + \operatorname{sh} \alpha \operatorname{ch} \beta)} \quad (25)$$

ce qui est une identité.

On a de même :

$$\operatorname{sh} \beta = \frac{R_1}{d} \operatorname{sh}(\alpha + \beta) \quad (26)$$

Et enfin, par exemple d'après les égalités (21) et (25) :

$$c = R_1 \operatorname{sh} \alpha = \frac{R_1 R_2}{d} \operatorname{sh}(\alpha + \beta) \quad (27)$$

Ces quatre dernières égalités permettent donc de passer de la première définition à la seconde. Elles seront d'une grande utilité dans les calculs qui vont suivre.

I-23 - Écoulement autour de deux cercles sans circulation

(La vitesse étant uniforme et rectiligne à l'infini)

Nous diviserons l'étude de l'écoulement autour de deux cercles en deux parties, pour des raisons de simplification des calculs : étude de l'écoulement sans circulation, et étude de l'écoulement dû aux tourbillons (*réels et images*), puisque ces deux écoulements sont superposables. Nous reprendrons les notations du paragraphe précédent, c'est-à-dire les notations de LAGALLY, à savoir : (voir figure page 11). Le petit cercle K_1 a pour rayon $R_1 = c/\operatorname{sh}\alpha$ et son centre O_1 est à la distance $|OO_1| = c \coth\alpha$ de l'origine O des coordonnées et l'on a de même pour le grand cercle K_2 : $R_2 = c/\operatorname{sh}\beta$ et $|OO_2| = c \coth\beta$. L'origine O étant sur la ligne des centres, la distance des centres O_1O_2 vaut $d = c(\coth\alpha + \coth\beta)$, c étant la distance de l'origine aux points limites Q_1 et Q_2 du faisceau.

D'après ce que nous avons vu au paragraphe 1-12 les deux doublets primitifs sont au centre des cercles, en O_1 et en O_2 . Nous examinerons d'abord la position des images de ces deux doublets alternativement dans l'un et l'autre cercle, en réservant pour une seconde partie le calcul de leur intensité.

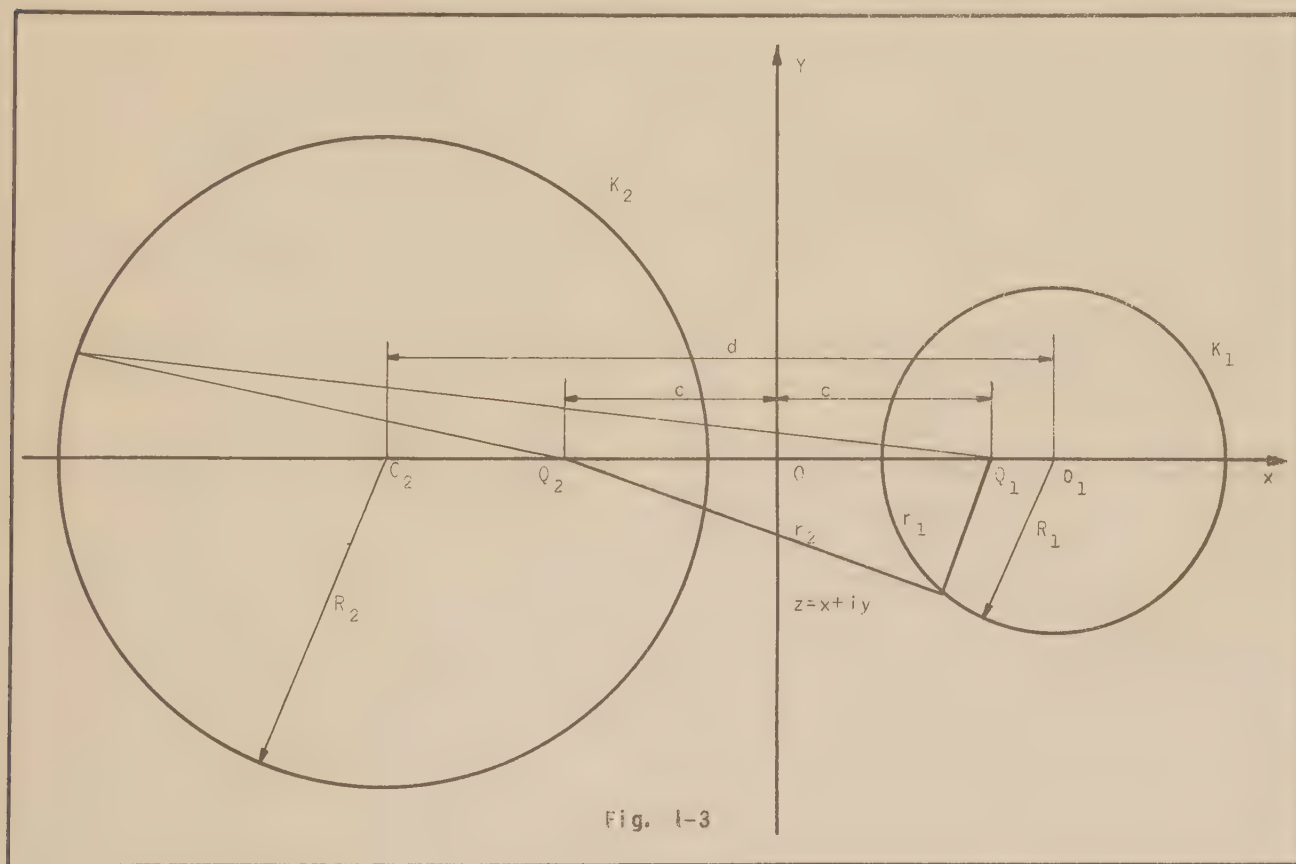


Fig. I-3

Tous les calculs de cette note sont faits sur des longueurs. Il ne saurait être question de signe, sauf dans les cas manifestes, comme par exemple dans l'établissement des fonctions potentielles elles-mêmes.

1-231 - POSITION DES IMAGES DU DOUBLET PLACÉ EN O_2 .

Pour toutes les notations on se reportera à la figure page 13.

La première image du doublet placé en O_2 est en un point A_1 intérieur au cercle K_1 et tel que :

$$O_1 A_1 \times O_1 O_2 = R_1^2$$

soit :

$$\begin{aligned} O_1 A_1 &= \frac{R_1^2}{O_1 O_2} = \frac{c^2}{d \operatorname{sh}^2 \alpha} = \frac{c^2}{c \operatorname{sh}^2 \alpha (\coth \alpha + \coth \beta)} \\ &= \frac{c \operatorname{sh} \alpha \operatorname{sh} \beta}{\operatorname{sh}^2 \alpha (\operatorname{ch} \alpha \operatorname{sh} \beta + \operatorname{sh} \alpha \operatorname{ch} \beta)} = \frac{c \operatorname{sh} \beta}{\operatorname{sh} \alpha \operatorname{sh}(\alpha + \beta)} \end{aligned}$$

On a, sur la figure :

$$O A_1 = O O_1 - A_1 O$$

d'où

$$\begin{aligned} O A_1 &= c \coth \alpha - c \frac{\operatorname{sh} \beta}{\operatorname{sh} \alpha \operatorname{sh}(\alpha + \beta)} = \frac{\operatorname{sh}(\alpha + \beta) \operatorname{ch} \alpha - \operatorname{sh} \beta}{\operatorname{sh} \alpha \operatorname{sh}(\alpha + \beta)} \\ &= c \frac{\operatorname{ch} \alpha \operatorname{sh} \alpha \operatorname{ch} \beta + \operatorname{sh} \beta \operatorname{ch}^2 \alpha - \operatorname{sh} \beta}{\operatorname{sh} \alpha \operatorname{sh}(\beta + \alpha)} = c \frac{\operatorname{ch}(\alpha + \beta)}{\operatorname{sh}(\alpha + \beta)} \end{aligned}$$

$$O A_1 = c \coth(\alpha + \beta)$$

La seconde image est l'image placée en A_2 du doublet placé en A_1 , par rapport au cercle K_2 . Et l'on doit avoir :

$$O_2 A_1 \times O_2 A_2 = R_2^2 \quad \text{avec} \quad O_2 A_1 = O_1 O_2 - O_1 A_1$$

$$\begin{aligned} O_2 A_1 &= c(\coth \alpha + \coth \beta - \frac{\operatorname{sh} \beta}{\operatorname{sh} \alpha \operatorname{sh}(\alpha + \beta)}) \\ &= c[\coth \beta + \coth(\alpha + \beta)] \\ &= c \frac{\operatorname{ch} \beta \operatorname{sh}(\alpha + \beta) + \operatorname{ch}(\alpha + \beta) \operatorname{sh} \beta}{\operatorname{sh} \beta \operatorname{sh}(\alpha + \beta)} = c \frac{\operatorname{sh}(\alpha + 2\beta)}{\operatorname{sh} \beta \operatorname{sh}(\alpha + \beta)} \end{aligned}$$

D'où :

$$O_2 A_2 = \frac{c^2}{\operatorname{sh}^2 \beta} \frac{\operatorname{sh}(\alpha + \beta) \operatorname{sh} \beta}{c \operatorname{sh}(\alpha + 2\beta)} = \frac{c \operatorname{sh}(\alpha + \beta)}{\operatorname{sh} \beta \operatorname{sh}(\alpha + 2\beta)}$$

Et l'on a, sur la figure :

$$\begin{aligned} O A_2 &= O O_2 - A_2 O_2 \\ &= c \left[\coth \beta - \frac{\operatorname{sh}(\alpha + \beta)}{\operatorname{sh} \beta \operatorname{sh}(\alpha + 2\beta)} \right] = c \coth(\alpha + 2\beta) \end{aligned}$$

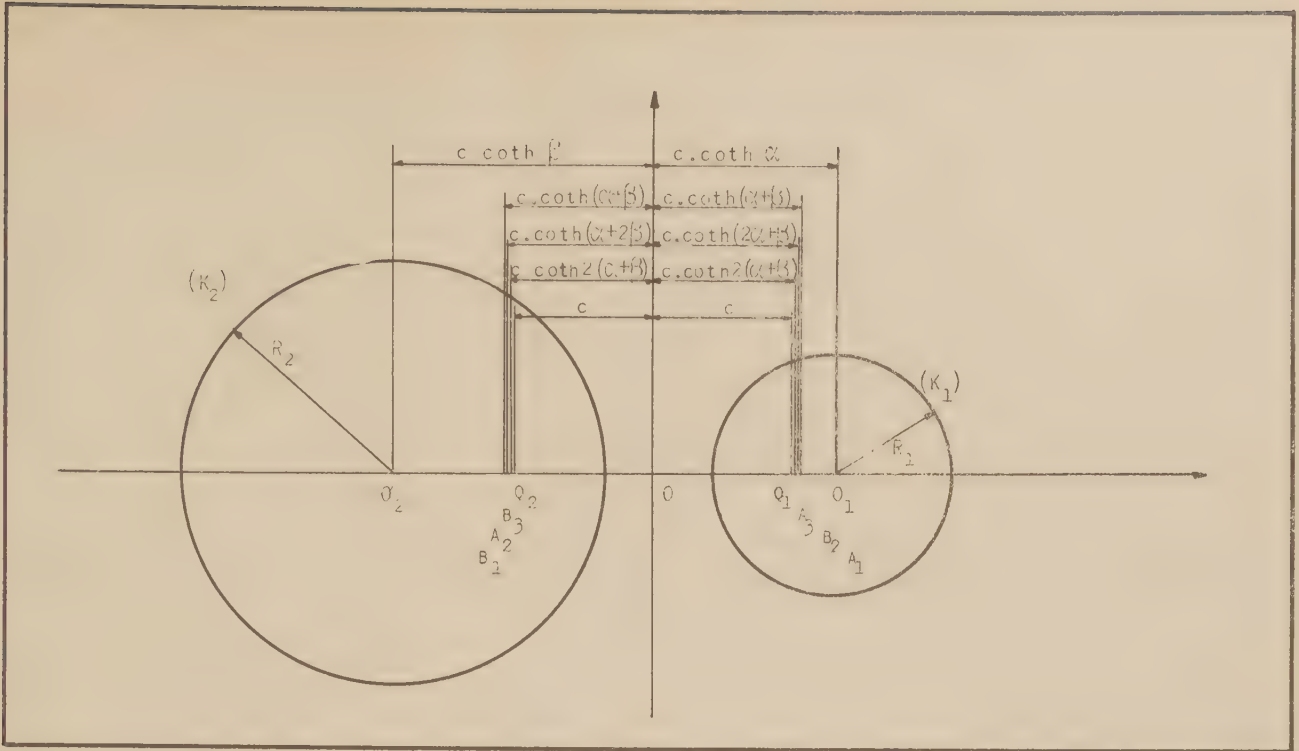


Fig. 1-4

La troisième image est l'image, du point A_3 du doublet placé en A_2 , par rapport au cercle K_1 . Et l'on doit avoir encore :

$$O_1 A_3 \times O_1 O_2 = R_1^2 \quad \text{avec} \quad O_1 A_2 = O_1 O + O A_2$$

$$O_1 A_2 = c \left[\coth \alpha + \coth(\alpha + 2\beta) \right] = \frac{c \operatorname{sh}(2\alpha + 2\beta)}{\operatorname{sh} \alpha \operatorname{sh}(\alpha + 2\beta)}$$

Donc :

$$O_1 A_3 = \frac{c^2}{\operatorname{sh}^2 \alpha} \frac{\operatorname{sh} \alpha \operatorname{sh}(\alpha + 2\beta)}{c \operatorname{sh}(2\alpha + 2\beta)} = \frac{c \operatorname{sh}(\alpha + 2\beta)}{\operatorname{sh} \alpha \operatorname{sh}(2\alpha + 2\beta)}$$

et l'on a :

$$\begin{aligned} O A_3 &= O O_1 - A_3 O_1 \\ &= c \left[\coth \alpha - \frac{\operatorname{sh}(\alpha + 2\beta)}{\operatorname{sh} \alpha \operatorname{sh}(2\alpha + 2\beta)} \right] = c \coth(2\alpha + 2\beta) \end{aligned}$$

La suite des images se présente donc de la façon suivante :

- A l'intérieur du cercle K_2

· un doublet en O_2 avec $O O_2 = c \coth \beta$

· un doublet en A_2 avec $O A_2 = c \coth[\beta + (\alpha + \beta)]$

- A l'intérieur du cercle K_1

· un doublet en A_1 avec $O A_1 = c \coth(\alpha + \beta)$

· un doublet en A_3 avec $O A_3 = c \coth 2(\alpha + \beta)$

Plus généralement, supposons à l'intérieur du cercle K_1 une singularité placée sur la ligne des centres en un point $A_{(2n-1)}$ tel que :

$$OA_{(2n-1)} = c \coth n(\alpha+\beta)$$

On a, (en longueur) :

$$\begin{aligned} OA_{(2n-1)} &= O_2O + OA_{2n-1} = c [\coth \beta + \coth n(\alpha+\beta)] \\ &= c \frac{\operatorname{sh}[\beta+n(\alpha+\beta)]}{\operatorname{sh} \beta \operatorname{sh} n(\alpha+\beta)} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} O_1A_{(2n-1)} &= OO_1 - A_{(2n-1)}O = c [\coth \alpha - \coth n(\alpha+\beta)] \\ \overline{O_1A_{(2n-1)}} &= c \frac{\operatorname{sh}[\beta+(n-1)(\alpha+\beta)]}{\operatorname{sh} \alpha \operatorname{sh} n(\alpha+\beta)} \end{aligned}$$

Nous allons voir en quel point, à l'intérieur du cercle K_2 est l'image de cette singularité, puis en quel point était la singularité origine dont celle qui est au point $A_{(2n-1)}$ est l'image.

Pour l'image de la singularité placée en $A_{(2n-1)}$ elle est, avec des notations qui s'expliquent d'elles-mêmes en un point A_{2n} intérieur au cercle K_2 et tel que :

$$\begin{aligned} \overline{O_2A_{2n}} \times \overline{O_2A_{2n-1}} &= R_2^2 = \frac{c^2}{\operatorname{sh}^2 \beta} \\ \overline{O_2A_{2n}} &= \frac{c^2}{\operatorname{sh}^2 \beta} \frac{\operatorname{sh} \beta \operatorname{sh} n(\alpha+\beta)}{c \operatorname{sh}[\beta+n(\alpha+\beta)]} = \frac{c \operatorname{sh} n(\alpha+\beta)}{\operatorname{sh} \beta \operatorname{sh}[\beta+n(\alpha+\beta)]} \\ \overline{OA_{2n}} &= \overline{OO_2} - \overline{A_{2n}O_2} = c \left[\coth \beta - \frac{\operatorname{sh} n(\alpha+\beta)}{\operatorname{sh} \beta \operatorname{sh}[\beta+n(\alpha+\beta)]} \right] = c \coth[\beta+n(\alpha+\beta)] \end{aligned}$$

Quant à la singularité origine, elle est en un point $A_{2(n-1)}$ intérieur au cercle K_2 et tel que .

$$\begin{aligned} \overline{O_1A_{2(n-1)}} \times \overline{O_1A_{2(n-1)}} &= R_1^2 = \frac{c^2}{\operatorname{sh}^2 \alpha} \\ \overline{O_1A_{2(n-1)}} &= \frac{c^2}{\operatorname{sh}^2 \alpha} \frac{\operatorname{sh} \alpha \operatorname{sh} n(\alpha+\beta)}{c \operatorname{sh}[\beta+(n-1)(\alpha+\beta)]} = \frac{c \operatorname{sh} n(\alpha+\beta)}{\operatorname{sh} \alpha \operatorname{sh}[\beta+(n-1)(\alpha+\beta)]} \\ \overline{OA_{2(n-1)}} &= \overline{O_1A_{2(n-1)}} - \overline{OO_1} \\ &= c \left[\frac{\operatorname{sh} n(\alpha+\beta)}{\operatorname{sh} \alpha \operatorname{sh}[\beta+(n-1)(\alpha+\beta)]} - \coth \alpha \right] \\ &= c \coth[\beta+(n-1)(\alpha+\beta)] \end{aligned}$$

Ainsi, à l'intérieur du cercle K_2 , deux singularités images, de la même suite, et se suivant, sont à des distances de l'origine telles que :

$$\begin{aligned} \overline{OA_{2(n-1)}} &= c \coth[\beta+(n-1)(\alpha+\beta)] \\ \overline{OA_{2n}} &= c \coth[\beta+n(\alpha+\beta)] \end{aligned}$$

On en déduit immédiatement que deux singularités images de la même suite, et se suivant sont, dans le cercle K_1 , à des distances de l'origine telles que

$$\overline{OA_{2n-1}} = c \coth n(\alpha + \beta)$$

$$\overline{OA_{2n+1}} = c \coth (n+1)(\alpha + \beta)$$

On voit déjà que toutes les singularités, images de celle qui est placée au point O_2 , forment ainsi, à l'intérieur de chaque cercle, une suite infinie, comprise entre le centre du cercle et le point limite du faisceau, intérieur au même cercle (d'abscisse $\pm c$). Et comme la cotangente hyperbolique tend très rapidement vers l'unité, toutes les singularités à l'intérieur d'un même cercle se rapprochent très rapidement les unes des autres et du point limite.

1-232 - POSITION DES IMAGES DU DOUBLET PLACÉ EN O_1 .

Nous abrègerons les calculs ici : On voit bien, intuitivement, que si l'on appelle B_1 le point intérieur à K_2 où se trouve la première image de ce doublet et B_n le point où se trouve la n ème image, il suffira de remplacer, dans les formules précédentes pour avoir les abscisses des différents points-images, α par β et réciproquement.

Nous allons vérifier cela pour la première image et dans le cas général

A l'intérieur du cercle K_2 la première image se trouve au point B_1 tel que

$$\overline{O_2 B_1} \times \overline{O_2 O_1} = R_2^2 = \frac{c^2}{\text{sh}^2 \beta}$$

D'où :

$$\overline{O_2 B_1} = \frac{c^2}{\text{sh}^2 \beta} \frac{1}{c(\coth \beta + \coth \alpha)} = \frac{c \text{ sh } \alpha}{\text{sh} \beta \text{ sh}(\alpha + \beta)}$$

Et par suite :

$$\begin{aligned} \overline{OB_1} &= \overline{OO_2} - \overline{B_1 O_2} = c \left[\coth \beta - \frac{\text{sh } \alpha}{\text{sh} \beta \text{ sh}(\alpha + \beta)} \right] \\ &= c \coth(\alpha + \beta) \end{aligned}$$

Dans le cas général, ce sont maintenant les termes d'indice impair qui sont à l'intérieur du cercle K_2 et les termes d'indice pair à l'intérieur du cercle K_1 .

Supposons alors qu'à l'intérieur du cercle K_2 on ait sur la ligne des centres une singularité en un point B_{2n-1} tel que :

$$\overline{OB_{2n-1}} = c \coth n(\alpha + \beta)$$

Nous allons vérifier qu'elle est image d'une singularité intérieure à K_1 placée en un point $B_{2(n-1)}$ tel que :

$$\overline{OB_{2(n-1)}} = c \coth [\alpha + (n-1)(\alpha + \beta)]$$

et que sa propre image dans le cercle K_1 est en un point B_{2n} tel que :

$$\overline{OB_{2n}} = c \coth [\alpha + n(\alpha + \beta)]$$

D'après ce que nous avons vu déjà, il suffit de vérifier que

$$\overline{O_2 B_{2(n-1)}} \times \overline{O_2 B_{2n-1}} = R_2^2 = \frac{c^2}{\text{sh}^2 \beta}$$

et que :

$$\overline{O_1 B_{2n}} \times \overline{O_1 B_{2n-1}} = R_1^2 = \frac{c^2}{\text{sh}^2 \alpha}$$

Or, on a :

$$\begin{aligned} \overline{O_1 B_{2n-1}} &= \overline{OO_1} + \overline{OB_{2n-1}} = c \left\{ \coth \alpha + \coth n(\alpha + \beta) \right\} \\ &= c \frac{\text{sh}[\alpha + n(\alpha + \beta)]}{\text{sh} \alpha \text{sh} n(\alpha + \beta)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{O_1 B_{2n}} &= \overline{OO_1} - \overline{OB_{2n}} = c \left\{ \coth \alpha - \coth [\alpha + n(\alpha + \beta)] \right\} \\ &= c \frac{\text{sh} n(\alpha + \beta)}{\text{sh} \alpha \text{sh} [n(\alpha + \beta) + \alpha]} \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \overline{O_1 B_{2n-1}} \times \overline{O_1 B_{2n}} &= c^2 \frac{\text{sh}[\alpha + n(\alpha + \beta)]}{\text{sh} \alpha \text{sh} n(\alpha + \beta)} \frac{\text{sh} n(\alpha + \beta)}{\text{sh} \alpha \text{sh} [\alpha + n(\alpha + \beta)]} \\ &= c \frac{c^2}{\text{sh}^2 \alpha} \end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned} \overline{O_2 B_{2(n-1)}} &= \overline{O_2 O} + \overline{OB_{2(n-1)}} = c \left\{ \coth \beta + \coth [\alpha + (n+1)(\alpha + \beta)] \right\} \\ &= c \frac{\text{sh} n(\alpha + \beta)}{\text{sh} \beta \text{sh} [\alpha + (n+1)(\alpha + \beta)]} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{O_2 B_{2n-1}} &= \overline{OO_2} - \overline{OB_{2n-1}} = c \left\{ \coth \beta - \coth n(\alpha + \beta) \right\} \\ &= c \frac{\text{sh} [\alpha + (n-1)(\alpha + \beta)]}{\text{sh} \beta \text{sh} n(\alpha + \beta)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{O_2 B_{2(n-1)}} \times \overline{O_2 B_{2n-1}} &= c^2 \frac{\text{sh} n(\alpha + \beta)}{\text{sh} \beta \text{sh} [\alpha + (n-1)(\alpha + \beta)]} \frac{\text{sh} [\alpha + (n-1)(\alpha + \beta)]}{\text{sh} \beta \text{sh} n(\alpha + \beta)} \\ &= c \frac{c^2}{\text{sh}^2 \beta} \end{aligned}$$

Ce qu'il fallait démontrer.

Ainsi donc les deux séries d'images correspondant aux deux doublets primitifs placés aux points O_1 et O_2 se trouvent alternés dans chaque cercle.

1.233 - VALEUR DE L'INTENSITE DES DOUBLET.

IMAGE DU DOUBLET PLACE EN O_2

D'après ce que nous avons écrit au paragraphe 1-12 de ce chapitre et en appelant u et v les composantes suivant les axes de référence de la vitesse à l'infini, l'intensité du doublet placé au point O_1 est :

$$(u+iv) R_1^2 = (u+iv) \frac{c^2}{\text{sh}^2 \alpha}$$

et l'intensité du doublet placé au point O_2 :

$$(u+iv) R_2^2 = (u+iv) \frac{c^2}{\text{sh}^2 \beta}$$

Nous considérerons séparément la série des images de chacun des deux doublets primitifs. En effet dans un même cercle tous les doublets (*images et doublet primitif lorsqu'il y est*) correspondant à une même série ont même direction. Pour l'autre cercle, les doublets de la même série (*c'est-à-dire les doublets images correspondant à un même doublet primitif*) ont tous une direction conjuguée, c'est-à-dire, ici, en réalité, symétrique de la première par rapport à l'axe des y . (La valeur de leur intensité sera de la forme : $A(u+iv)$ avec A réel).

D'autre part, rappelons encore que l'intensité d'un doublet image d'un autre doublet placé en un point Z par rapport à un cercle de rayon a est égale à l'intensité du premier doublet multipliée par $a^2/O_1 Z^2$ si O_1 est le centre du cercle.

Ces remarques nous conduisent à écrire, pour la suite des quatre premiers doublets-images du doublet placé en O_2 les intensités suivantes :

Cercle K_2	Cercle K_1
$O_2 \rightarrow (u+iv) \frac{c^2}{\text{sh}^2 \beta}$	
$A_2 \rightarrow (u+iv) \frac{c^2}{\text{sh}^2(\alpha+\beta)} \frac{R_2^2}{O_2 A_1^2}$	$A_1 \rightarrow (-u+iv) \frac{c^2}{\text{sh}^2 \alpha} \frac{R_1^2}{C_1 A_2^2}$
$= (u+iv) \frac{c^2}{\text{sh}^2(\alpha+\beta)} \frac{c^2}{\text{sh}^2 \beta} \frac{\text{sh}^2(\alpha+\beta) \text{sh}^2 \beta}{c^2 \text{sh}^2(\alpha+2\beta)}$	$= (-u+iv) \frac{c^2}{\text{sh}^2 \beta} \frac{c^2}{\text{sh}^2 \alpha} \frac{\text{sh}^2 \alpha \text{sh}^2 \beta}{c^2 \text{sh}^2(\alpha+\beta)}$
$= (u+iv) \frac{c^2}{\text{sh}^2(\alpha+2\beta)}$	$= (-u+iv) \frac{c^2}{\text{sh}^2(\alpha+\beta)}$
$A_4 \rightarrow (u+iv) \frac{c^2}{\text{sh}^2 2(\alpha+\beta)} \frac{R_2^2}{O_2 A_3^2}$	$A_3 \rightarrow (-u+iv) \frac{c^2}{\text{sh}^2(\alpha+2\beta)} \frac{R_1^2}{C_1 A_2^2}$
$= (u+iv) \frac{c^2}{\text{sh}^2 2(\alpha+\beta)} \frac{c^2}{\text{sh}^2 \beta} \frac{\text{sh}^2 \beta \text{sh}^2 2(\alpha+\beta)}{c^2 \text{sh}^2(2\alpha+3\beta)}$	$= (-u+iv) \frac{c^2}{\text{sh}^2(\alpha+2\beta)} \frac{c^2}{\text{sh}^2 \alpha} \frac{\text{sh}^2 \alpha \text{sh}^2(\alpha+2\beta)}{c^2 \text{sh}^2 2(\alpha+\beta)}$
$= (u+iv) \frac{c^2}{\text{sh}^2(2\alpha+3\beta)}$	$= (-u+iv) \frac{c^2}{\text{sh}^2(2\alpha+2\beta)}$

Ce mode de calcul permet de généraliser sans vérifier la généralisation. Il est bien évident que le doublet-image intérieur au cercle O_2 et placé sur

la ligne des centres au point A_{2n} aura comme intensité :

$$A_{2n} \rightarrow (u+iv) \frac{c^2}{\operatorname{sh}^2[\beta + n(\alpha+\beta)]}$$

alors que : $OA_{2n} = c \coth[\beta + n(\alpha+\beta)]$ en grandeur et en signe, et que le doublet image placé au point $A_{(2n-1)}$ à l'intérieur du cercle K_1 aura comme intensité :

$$A_{(2n-1)} \rightarrow (-u+iv) \frac{c^2}{\operatorname{sh}^2 n(\alpha+\beta)}$$

pour

$$OA_{(2n-1)} = +c \coth n(\alpha+\beta)$$

avec la convention de signe déjà adoptée.

Par conséquent, le potentiel dû au doublet primitif placé au point O_2 et à toutes ses images s'écrit :

$$f_9(z) = (u+iv) c^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\{\operatorname{sh}^2[\beta + n(\alpha+\beta)]\} \{z + c \coth[\beta + n(\alpha+\beta)]\}} \\ + (-u+iv) c^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\{\operatorname{sh}^2 n(\alpha+\beta)\} \{z - c \coth n(\alpha+\beta)\}}$$

1-234 - IMAGES DU DOUBLET PLACE EN O_1 .

Il n'est pas utile de recommencer tout le raisonnement pour les images du doublet placé en O_1 . Nous avons vu qu'il suffisait de remplacer α par β et réciproquement, pour des images de même rang (*même indice*) des deux doublets primitifs.

Alors, à l'intérieur du cercle K_1 le doublet placé sur la ligne des centres au point B_{2n} aura comme intensité :

$$B_{2n} \rightarrow (u+iv) \frac{c^2}{\operatorname{sn}^2[\alpha+n(\alpha+\beta)]}$$

pour

$$OB_{2n} = +c \coth[\alpha+n(\alpha+\beta)]$$

et à l'intérieur du cercle K_2 le doublet placé au point B_{2n-1} aura comme intensité :

$$B_{2n-1} \rightarrow (-u+iv) \frac{c^2}{\operatorname{sh}^2 n(\alpha+\beta)}$$

alors que :

$$OB_{2n-1} = -c \coth n(\alpha+\beta)$$

Le premier doublet est le doublet primitif placé en O_1 et il a pour abscisse : $OO_1 = c \coth \alpha$ et pour intensité :

$$\frac{(u + iv) c^2}{\operatorname{sh}^2 \alpha}$$

Le potentiel dû à ce doublet primitif placé en O_1 et à toutes ses images est donc :

$$f_{10}(z) = (u+iv) c^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left\{ \operatorname{sh}^2 [\alpha + n(\alpha + \beta)] \right\} \left\{ z - c \coth n(\alpha + \beta) \right\}} \\ + (-u+iv) c^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left\{ \operatorname{sh}^2 n(\alpha + \beta) \right\} \left\{ z + c \coth n(\alpha + \beta) \right\}}$$

Le potentiel total dû aux deux doublets primitifs et à toutes leurs images s'écrit :

$$f(z) = f_9(z) + f_{10}(z) = (u+iv) c^2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\left\{ \operatorname{sh}^2 n(\alpha + \beta) \right\} \left\{ z + c \coth n(\alpha + \beta) \right\}} \\ + (+u+iv) c^2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\left\{ \operatorname{sh}^2 [\alpha + n(\alpha + \beta)] \right\} \left\{ z - c \coth [\alpha + n(\alpha + \beta)] \right\}}$$

Le signe $\sum'$ indiquant que la somme est prise en omettant la valeur $n = 0$. Au total, le potentiel de l'écoulement autour de deux cercles quelconques, sans circulation, avec une vitesse rectiligne et uniforme à l'infini ($u+iv$) peut s'écrire :

$$F_1(z) = (u-iv) \left[z - c^2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\left\{ \operatorname{sh}^2 n(\alpha + \beta) \right\} \left\{ z + c \coth n(\alpha + \beta) \right\}} \right] \quad (28) \\ + (u+iv) c^2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\left\{ \operatorname{sh}^2 [\alpha + n(\alpha + \beta)] \right\} \left\{ z - c \coth [\alpha + n(\alpha + \beta)] \right\}}$$

1-24 - Ecoulement autour de deux cercles inégaux et affectés de circulations différentes la vitesse étant rectiligne et uniforme à l'infini.

Nous avons déjà dit que l'on pouvait superposer plusieurs écoulements : Pourvu que chacun d'eux respecte les mêmes contours fixés à l'avance, nous sommes certains que l'écoulement résultant de leur somme respectera aussi ces contours. Aussi pour respecter la circulation (autour de chacun des cercles), que l'on trouve dans la réalité, nous superposerons à l'écoulement dû au potentiel (28) un écoulement de tourbillons. Nous savons d'autre part que quelle que soit la position d'un tourbillon à l'intérieur d'un cercle, la circulation des vitesses autour du contour du cercle est constante. Nous pouvons donc, pour assurer cette circulation prendre à l'intérieur d'un cercle plusieurs tourbillons placés en des points différents, pourvu que la somme de leurs circulations soit égale à celle que nous voulons. Nous allons voir dans la suite le bénéfice de cette liberté.

Soit Γ_1 la circulation autour du cercle K_1 , Γ_2 la circulation autour du cercle K_2 . Nous prendrons comme "tourbillons de remplacement" dans le cercle K_1 , - un tourbillon de circulation $\Gamma/2$ au point O_1 avec

$$\Gamma_1 + \Gamma_2 = 1$$

- un tourbillon de circulation $\Gamma'/2$ au point Q_1 , avec

$$\Gamma' = \Gamma_1 - \Gamma_2$$

Dans le cercle K_2 :

- un tourbillon de circulation $\Gamma'/2$ au point O_2
- un tourbillon de circulation $-\Gamma'/2$ au point Q_2 .

Il est alors facile de voir que le potentiel des deux tourbillons placés aux points Q_1 et Q_2 donne en particulier comme lignes de courant les deux cercles K_1 et K_2 . En effet, ces deux tourbillons étant de circulations opposées il suffit de vérifier (voir paragraphe 1-131 : image d'un tourbillon), que l'on a :

$$O_1Q_1 \times O_1Q_2 = R_1^2$$

$$O_2Q_2 \times O_2Q_1 = R_2^2$$

Mais sur la figure (1-4 page 13), on a :

$$O_1Q_1 = OO_1 - OQ_1 = c \coth \alpha - c \quad \text{et} \quad O_1Q_2 = O_1O + OQ_2 = c \coth \alpha + c$$

Donc :

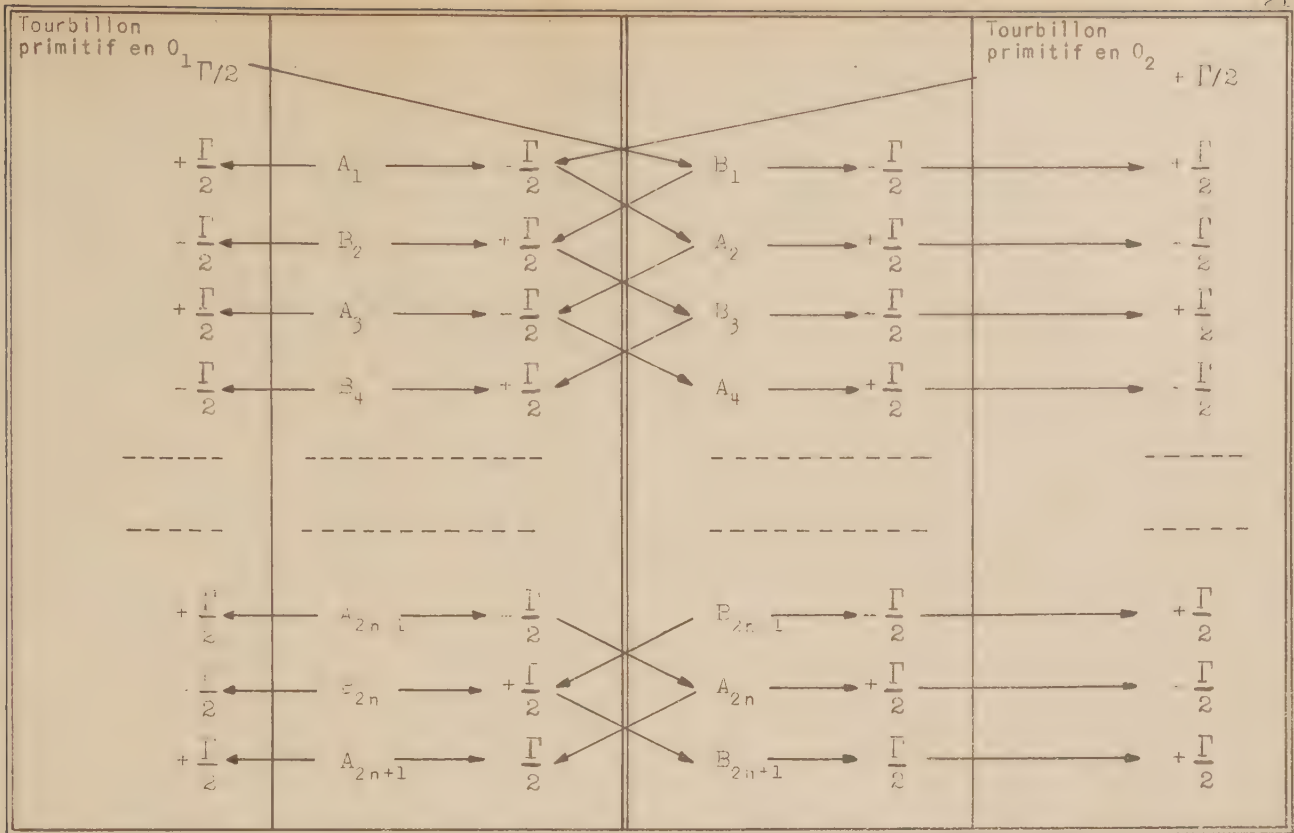
$$O_1Q_1 \times O_1Q_2 = c^2 (\coth \alpha - 1)(\coth \alpha + 1) = c^2 (\coth^2 \alpha - 1) = \frac{c^2}{\operatorname{sh}^2 \alpha} = R_1^2$$

De même :

$$Q_2O_2 \times O_2Q_1 = c^2 (\coth \beta - 1)(\coth \beta + 1) = c^2 (\coth^2 \beta - 1) = \frac{c^2}{\operatorname{sh}^2 \beta} = R_2^2$$

En ces conditions, il ne nous reste plus à chercher pour obtenir le potentiel total de l'écoulement avec circulation autour de deux cercles, que les images des deux tourbillons placés aux centres O_1 et O_2 et ayant même circulation $\Gamma/2 = \frac{1}{2}(\Gamma_1 + \Gamma_2)$. Il est bien évident que ces images viendront se placer en deux suites infinies, aux mêmes points A_n et B_n que les images des doublets du paragraphe précédent. En tenant compte du fait que pour un tourbillon deux images qui se suivent dans une même suite ont des circulations opposées (voir paragraphe 1-131) et en se rappelant l'adjonction au tourbillon-image dans un cercle d'un tourbillon de circulation opposée au centre du cercle, nous pourrons tracer le tableau suivant qui résume la formation de ces suites d'images :

(Voir tableau page 21)



On voit ainsi que toutes les images (nous voulons dire ici tous les tourbillons qui ne viennent pas au centre d'un cercle) ont même circulation dans les deux cercles lorsqu'elles appartiennent à une même suite et des circulations opposées pour les deux suites différentes.

Or d'après le tableau ci-dessous les images des deux suites, sont dans un même cercle, alternées. Les "tourbillons de compensation" au centre des cercles ont donc une circulation de même valeur absolue mais alternativement positive ou négative. La somme des circulations de ces tourbillons de compensation est donc nulle.

Cette remarque permet d'écrire le potentiel dû à ces tourbillons sous la forme simplifiée :

$$f_y(z) = -\frac{i\Gamma}{2\pi} \log(z-c \coth \alpha) (z+c \coth \alpha) - \frac{i\Gamma'}{4\pi} \log \frac{z-c}{z+c}$$

$$-\frac{i\Gamma}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \log \frac{[z-c \coth n(\alpha+\beta)][z+c \coth n(\alpha+\beta)]}{[z-c \coth n(\alpha+\beta)][z+c \coth n(\alpha+\beta)]}$$

Le potentiel total de l'écoulement autour de deux cercles inégaux avec des circulations différentes et une vitesse rectiligne et uniforme à l'infini s'écrit donc, avec les notations adoptées :

$$\begin{aligned}
f(z) = & (u-iv) \left[z-c^2 \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\{\operatorname{sh}^2 n(\alpha+\beta)\} \{z+c \coth n(\alpha+\beta)\}} \right] \\
& + (u+iv) \left[\sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{c^2}{\{\operatorname{sh}^2 [\alpha + n(\alpha+\beta)]\} \{z+c \coth [\alpha+n(\alpha+\beta)]\}} \right] - \frac{i\Gamma}{4\pi} \log \frac{z-c}{z+c} \\
& - \frac{i\Gamma}{4\pi} \left[\log(z-c \coth \beta)(z+c \coth \alpha) + \sum_{n=1}^{\infty} \log \frac{\{z-c \coth n(\alpha+\beta)\} \{z+c \coth n(\alpha+\beta)\}}{\{z-c \coth [\alpha+n(\alpha+\beta)]\} \{z+c \coth [\beta+n(\alpha+\beta)]\}} \right]
\end{aligned}$$

CHAPITRE II

POTENTIEL DE LAGALLY POUR L'ÉCOULEMENT AUTOUR DE DEUX CERCLES

Chapitre II

POTENTIEL DE LAGALLY POUR L'ÉCOULEMENT AUTOUR DE DEUX CERCLES.

2-1 - INTRODUCTION - POSITION DU PROBLÈME.

La formule précédente (page 22) a l'avantage de donner le potentiel de l'écoulement et la vitesse directement dans le plan des cercles; elle permet de calculer certains efforts assez facilement, du fait de la matérialisation des singularités; elle a par contre l'inconvénient de n'être pas elle-même très facilement calculable.

Nous rappellerons ici une méthode, maintenant à peu près classique et proposée par LAGALLY en 1927 (*Loc. - Cit*) qui ne présente pas cet inconvénient. Nous nous bornerons toutefois à exposer dans cette note les parties qui nous intéressent dans le problème que nous nous sommes posé et qui peut, pour le moment se résumer ainsi :

- Calculer autour de deux cercles bien définis d'un plan la circulation pour chacun d'eux et en chaque point de ces contours, la vitesse d'un écoulement quand on connaît à l'infini la valeur constante de la vitesse de ce même écoulement et quand on se fixe sur chacun des cercles un point de vitesse nulle.

2-2 - NOTATIONS ET TRANSFORMATION CONFORME.

Généralement les deux cercles K_1 et K_2 sont définis dans leur plan par leurs rayons (R_1 et R_2) et la distance de leurs centres d (entre O_1 et O_2) et la direction et le sens de O_1O_2 .

Le paragraphe 1-22 du chapitre précédent nous fait passer aisément de cette définition à la définition basée sur la distance des points limites du faisceau déterminé par les deux cercles (2 c entre Q_1 et Q_2) et sur le fait que le rapport des distances des points d'un cercle aux deux points Q_1 et Q_2 est constant.

Nous reprendrons les notations précédentes (*Voir figure II-1 page 27*) à savoir :

Pour le cercle K_1

$$\frac{r_1}{r_2} = \lambda \quad \text{avec} \quad \lambda > 1 \quad \text{Log } \lambda = \alpha$$

Pour le cercle K_2

$$\frac{r_1}{r_2} = \mu \quad \text{avec} \quad \mu < 1 \quad \text{Log } \mu = -\beta$$

L'origine des coordonnées est le point O tel que $|OQ_1| = |OQ_2| = c$, l'axe réel du plan (z) étant confondu avec la ligne des centres O_2O_1 , son sens étant celui de O_2 vers O_1 .

La transformation conforme :

$$Z = \text{Log} \frac{z + c}{z - c} \quad (30)$$

nous fait passer du domaine du plan z extérieur aux deux cercles et muni d'une coupure entre Q_1 et Q_2 au domaine intérieur à un rectangle périodique verticale-ment du plan Z . En effet cette transformation peut s'écrire :

$$Z = \text{Log} \frac{r_2}{r_1} e^{i(\theta_2 - \theta_1 + 2k\pi)}$$

avec les notations de la figure II-1 page 27 - soit encore

$$Z = \text{Log} \frac{r_2}{r_1} + i(\theta_3 + 2k\pi)$$

c'est-à-dire : pour le cercle K_1

$$Z = \alpha + i(\theta_3 + 2k\pi)$$

pour le cercle K_2

$$Z = -\beta + i(\theta_3 + 2k\pi)$$

On voit ainsi que le rectangle en question a les caractéristiques suivantes :

- ses côtés horizontaux ont pour ordonnée $Y = \pm \pi + 2k\pi$, k prenant toutes les valeurs entières de $-\infty$ à $+\infty$. La période de reproduction du rectangle est donc $2\omega_3 = 2i\pi$;

- ses côtés verticaux correspondent aux contours des cercles et ont pour abscisse

$$\text{pour le cercle } K_1 : X = \alpha$$

$$\text{pour le cercle } K_2 : X = -\beta$$

La figure primitive dans le plan Z se présente donc comme une bande infinie verticalement et formée de rectangles dont les côtés verticaux correspondant aux contours des cercles, forment d'après l'énoncé du problème, deux lignes de courant continues parallèles et infinies.

Il est visible sur la forme de l'équation de transformation que le point à l'infini du plan z des cercles correspond au point $Z = 0$ du plan du rectangle, ce point se reproduisant du reste suivant la période $2i\pi$.

(Voir Fig. II-1 page 27).

Plan z

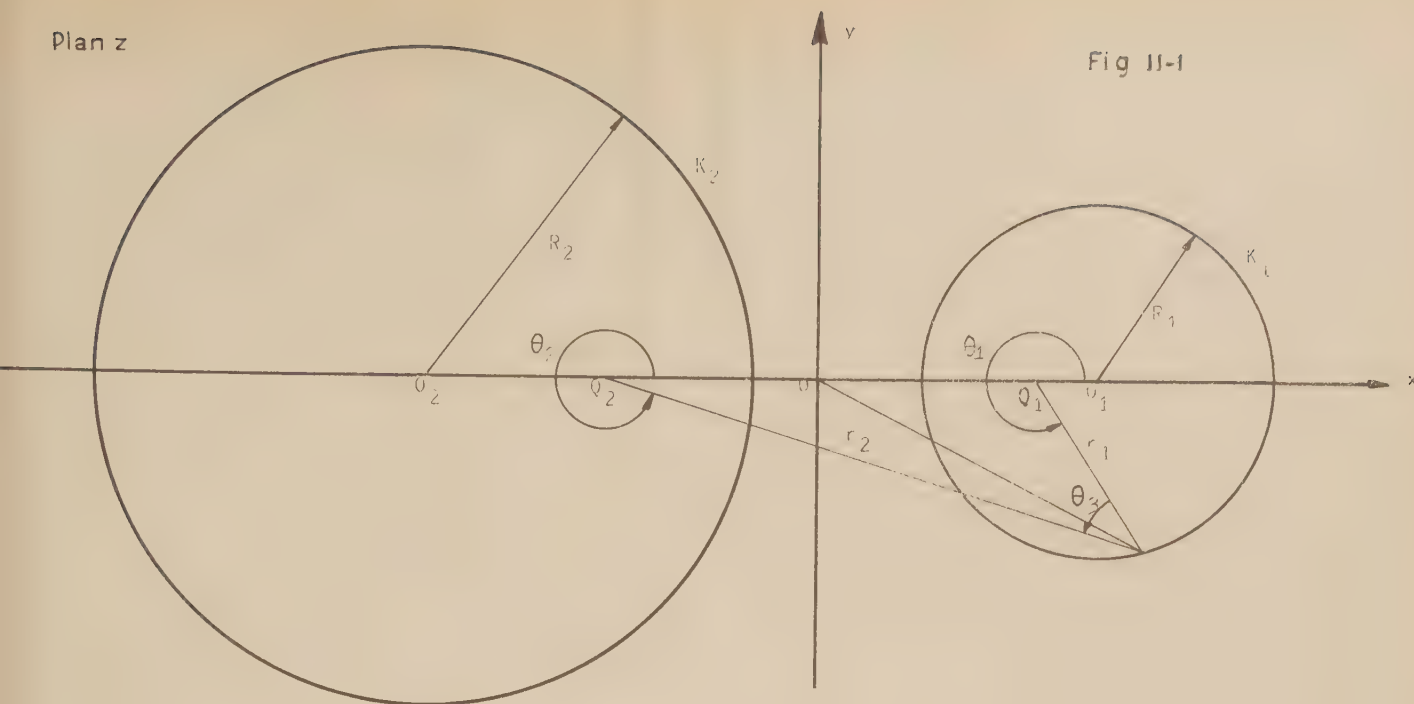
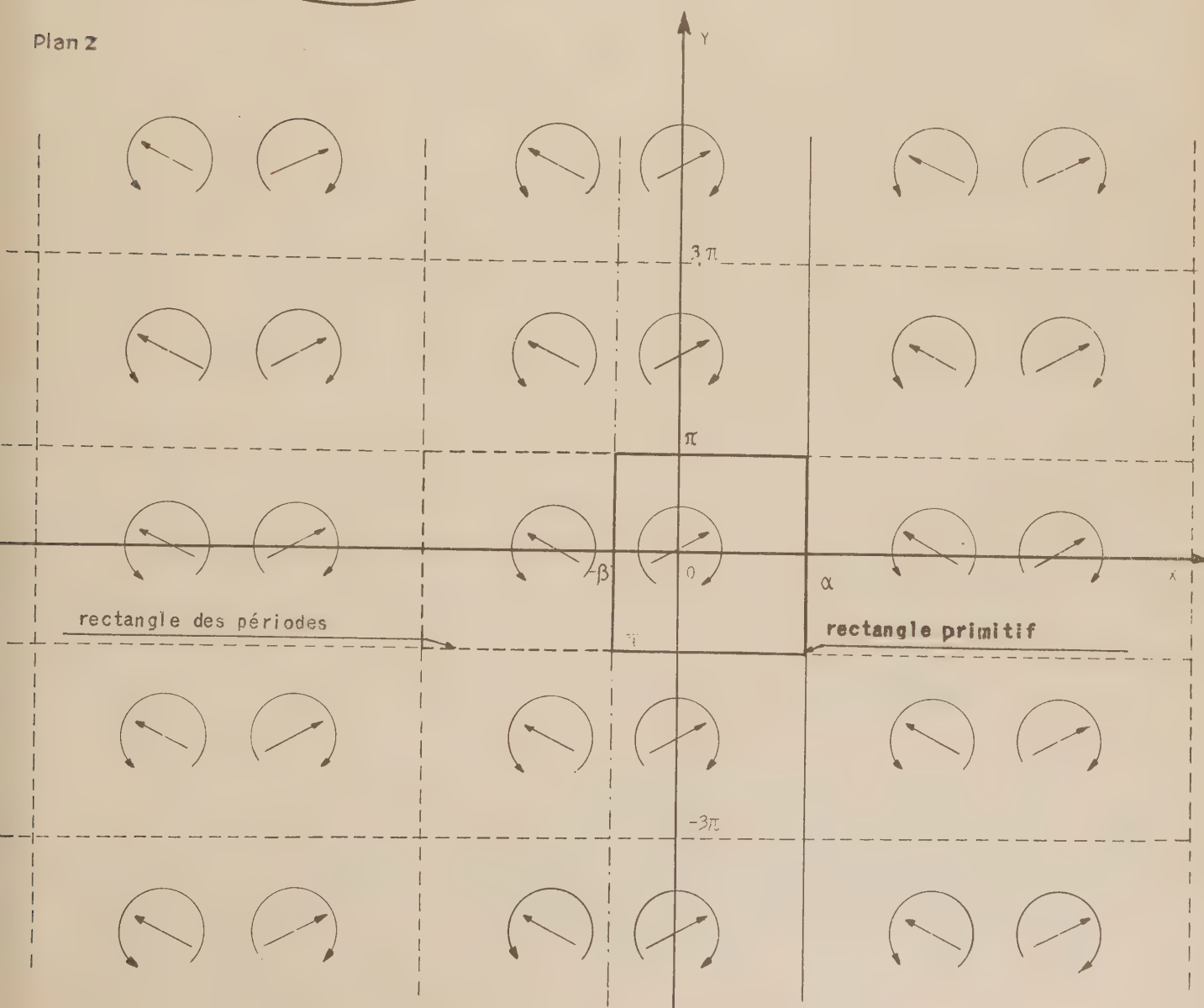


Fig II-1

Plan Z



2-3 - POTENTIEL DE L'ÉCOULEMENT DANS LE PLAN DU RECTANGLE.

L'écoulement dans le plan des cercles est donc défini par la valeur $V_0 e^{i\alpha}$ (1) de la vitesse à l'infini. Nous appellerons $-\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ la circulation totale supposée connue pour le moment autour des deux cercles. Dans le plan z et assez loin des deux cercles l'écoulement se présente comme un écoulement produit par un tourbillon placé à l'origine et par un courant de vitesse uniforme, le potentiel est donc de la forme :

$$f(z) = + \frac{i\Gamma}{2\pi} \log z + V_0 e^{i\alpha} z$$

Ce qui s'écrit pour le plan Z

$$f(Z) = f(z) = - \frac{i\Gamma}{2\pi} \log Z + \frac{2V_0 c e^{i\alpha}}{Z} + P(Z) \quad (31)$$

$P(Z)$ désignant une fonction régulière dans tout le rectangle

En effet, la formule (30) :

$$Z = \log \frac{z + c}{z - c}$$

peut s'écrire :

$$z = c \frac{e^Z + 1}{e^Z - 1}$$

soit, en développant :

$$z = \frac{c}{Z} \left[2 + \frac{Z^2}{6} + a_1 Z^3 + a_3 Z^5 + \dots \right]$$

a_1 et a_3 étant des coefficients à déterminer, mais sans importance ici.

A l'intérieur du rectangle du plan Z l'écoulement est donc produit par un doublet et par un tourbillon placés au centre des coordonnées, ajouté à un écoulement sans singularité que nous déterminerons par la suite. Comme le rectangle, les singularités précédentes se reproduisent périodiquement. On retrouve donc un tourbillon de circulation $+\Gamma$ et un doublet d'intensité $V_0 c e^{i\alpha}$ en chaque point :

$$Z = 2 + k\pi,$$

k prenant toutes les valeurs entières de $-\infty$ à $+\infty$

D'autre part, comme les droites $X = \alpha$ et $X = -\beta$ sont des lignes de courant, on les respectera, comme on l'a vu au paragraphe 1-13 du chapitre I en employant la méthode des images mais il y a deux parois, ces images vont se réfléchir alternativement dans l'une et dans l'autre en une suite infinie "à la manière d'un objet placé entre deux miroirs parallèles". En réalité, nous nous trouvons en face d'une double suite infinie puisque les singularités primitives se reproduisent périodiquement dans le sens vertical

Si l'on raisonne seulement sur la bande limitée par les droites $Y = \pi$ et $Y = -\pi$ les deux premières images, placées aux points $Z = 2\alpha$ et $Z = -2\beta$ auront comme valeur :

Pour le tourbillon : circulation $+\Gamma$

Pour le doublet : intensité $V_0 c e^{i\alpha}$

Nota - (1) - Dans la suite de ce chapitre, pour respecter à la fois les notations de LAGALLY et celles de la mécanique des fluides classique nous avons employé le même symbole α pour désigner l'incidence et l'abscisse de l'un des côtés du rectangle. Nous ne pensons pas qu'il puisse en résulter de confusions.

Puis, nous retrouverons aux points $Z = 2(\alpha + \beta)$ et $Z = -2(\alpha + \beta)$ des singularités dont la valeur est la même que celles des singularités primitives, ... etc..

On conçoit ainsi qu'en prenant un rectangle (*rectangle des périodes*) dont les côtés verticaux ont par exemple comme abscisse $X = \alpha$ et $X = -\alpha - 2\beta$ c'est à-dire un rectangle double du rectangle de transformation, nous aurons une figure périodique horizontalement, puisque les singularités qui lui sont intérieures se reproduisent, non par symétrie, mais par période, cette période étant au reste $2\omega_1 = 2(\alpha + \beta)$.

Comme ce raisonnement est valable pour toutes les bandes horizontales comprises entre les droites d'équation $Y = 2k\pi \pm \pi$ nous voyons apparaître dans le plan Z du rectangle deux séries de singularités se reproduisant d'une façon doublement périodique, les deux périodes étant

$$2\omega_1 = 2(\alpha + \beta)$$

$$2\omega_2 = 2i\pi$$

Revenons encore une fois au rectangle des périodes primitif. La formule 31 nous permet d'écrire la vitesse dans ce rectangle s'il n'y avait pas d'images sous la forme

$$W = -\frac{i\Gamma}{2\pi} \left(\frac{1}{Z} - \frac{1}{Z+2\beta} \right) - 2c V_0 \left(\frac{e^{i\alpha}}{Z^2} - \frac{e^{-i\alpha}}{(Z+2\beta)^2} \right) + R(Z)$$

$R(Z)$ étant une fonction régulière dans le rectangle des périodes. W possède donc un pôle double et un pôle simple aux points $Z = 0$ et $Z = -2\beta$.

Comme la vitesse vraie doit tenir compte de toutes les images la fonction W qui représente cette vitesse devra être une fonction doublement périodique c'est à-dire une fonction elliptique. Or ces fonctions pouvant n'être définies que par leurs pôles, à une constante additive près, W est nécessairement de la forme :

$$W = -\frac{i\Gamma}{2\pi} [\zeta(Z) - \zeta(Z+2\beta)] - 2c V_0 [e^{i\alpha} p(Z) - e^{-i\alpha} p(Z+2\beta)] + ix \quad (32)$$

puisque la fonction $\zeta(Z)$ possède un pôle simple en $Z = 0$ et $p(Z)$ un pôle double.

La constante ix est choisie imaginaire pure intentionnellement. On le vérifiera par la suite.

Le potentiel complexe déduit de la formule 32 dans le plan Z devient :

$$f(z) = -\frac{i\Gamma}{2\pi} \log \frac{\sigma(Z)}{\sigma(Z+2\beta)} + 2c V_0 [e^{i\alpha} \zeta(Z) - e^{-i\alpha} \zeta(Z+2\beta)] + ixZ + x \quad (33)$$

Nous passerons sur la justification mathématique qui ne nous intéresse pas ici de ces résultats.

La formule 32 nous donne la vitesse dans le plan du rectangle.

La vitesse dans le plan des cercles est évidemment

$$\frac{df}{dz} = \frac{df}{dZ} \frac{dZ}{dz} = W \left(\frac{1}{z+c} - \frac{1}{z-c} \right) = \frac{2cW}{z^2 - c^2}$$

Nous noterons pour la suite que le module de cette vitesse s'écrit en particulier pour chacun des cercles

$$\left| \frac{df}{dz} \right| = \frac{2c|W|}{r_1 r_2}$$

2-4 - CALCUL DES CIRCULATIONS AUTOUR DE CHACUN DES CERCLES.

Nous aurons besoin par la suite de nous fixer un point de vitesse nulle sur chacun des cercles. Cela nous déterminera immédiatement les valeurs de la circulation totale Γ et de la constante x puisque nous aurons alors un système de deux équations linéaires à deux inconnues. Nous verrons dans le paragraphe suivant que le premier crochet reste réel et le second imaginaire pur du moins lorsque Z varie sur l'un ou l'autre des côtés du rectangle primitif.

D'autre part, nous avons :

$$f(Z+2\omega_3) - f(Z) = -\frac{i\Gamma}{2\pi} \log \frac{\sigma(Z+2\omega_3) \cdot \sigma(Z+2\beta)}{\sigma(Z) \sigma(Z+2\omega_3+2\beta)} + 2i x \omega_3 \\ - ic V_0 [e^{i\alpha} \zeta(Z+2\omega_3) - e^{-i\alpha} \zeta(Z+2\omega_3+2\beta) - e^{i\alpha} \zeta(Z) + e^{-i\alpha} \zeta(Z+2\beta)]$$

Or, dans les formules 6 et 7 du § 1 de l'Appendice nous avons :

$$\zeta(Z+2\omega_3) - \zeta(Z) = 2\eta_3$$

$$\frac{\sigma(Z+2\omega_3)}{\sigma(Z)} = -e^{2\eta_3(Z+\omega_3)}$$

Il vient donc :

$$f(Z+2\omega_3) - f(Z) = i \left[\frac{2}{\pi} \Gamma \beta \eta_3 - 8c V_0 \sin \alpha \cdot \eta_3 + 2x \omega_3 \right]$$

Comme η_3 et ω_3 sont imaginaires pures il s'ensuit que : $f(Z+2\omega_3) - f(Z)$ est réel - C'est donc aussi la différence parties réelles de $f(Z+2\omega_3)$ et de $f(Z)$ c'est-à-dire encore la différence de potentiel ψ des vitesses, soit $\psi(X, Y+2\omega_3) - \psi(X, Y)$ et en particulier la différence de potentiel entre les deux points extrêmes du côté vertical du rectangle des périodes.

Il s'ensuit que cette différence représente la circulation le long de ce côté (d'équation $X = \alpha$) et par conséquent au signe près la circulation autour du cercle K_1 puisqu'elle ne varie pas dans la transformation conforme. On a donc :

$$\Gamma_1 = -i \left[\frac{2}{\pi} \Gamma \beta \eta_3 - 8c V_0 \sin \alpha \cdot \eta_3 + 2x \omega_3 \right] \quad (34)$$

Il s'ensuit pour le cercle K_2 la circulation

$$\Gamma_2 = -(\Gamma + \Gamma_1) \quad (34')$$

Les formules (33), (34) et (34') résolvent donc le problème que nous nous étions posé. Là, du reste, s'arrête, en ce qui nous concerne l'exposé de LAGALLY. Nous allons voir maintenant le développement de la formule (33) qui nous permet le calcul numérique de cette formule.

2-5 - ETABLISSEMENT DU CALCUL NUMERIQUE.

Ce qui nous intéresse plus particulièrement, c'est le calcul de la vitesse de l'écoulement sur chacun des contours en l'occurrence sur les cercles ou plus simplement encore sur les deux côtés verticaux du rectangle primitif, qui ont, rappelons-le, pour équation dans le plan Z :

$$X = \alpha \quad X = -\beta \quad \text{avec} \quad 2\omega_1 = 2(\alpha + \beta)$$

La partie réelle de la variable que nous prendrons dans les calculs sera donc constante pour chacun des cercles.

Cette variable s'écrit donc avec les notations de la figure de la page 27 et les notations du paragraphe 3-2 de ce chapitre

$$Z = \alpha + i(\theta_2 - \theta_1) = \alpha + i\theta_3 \quad \text{pour le cercle } K_1$$

$$Z = -\beta + i(\theta_2 - \theta_1) = -\beta + i\theta_3 \quad \text{pour le cercle } K_2$$

du moins en ce qui concerne le rectangle primitif de la bande comprise entre les deux horizontales $Y = -\pi$ $Y = +\pi$ du plan Z .

Dans la suite, et pour simplifier les calculs, nous nous occuperons uniquement de ce rectangle primitif.

En revenant maintenant aux notations du paragraphe 3 de l'Appendice nous poserons ici, pour simplifier de nouveau :

$$a = \frac{\pi \beta}{2 \omega_1}$$

$$b = \frac{\pi \theta_3}{2 \omega_1}$$

On aura alors

- pour le cercle K_1 :

$$\frac{\pi Z}{2 \omega_1} = \frac{\pi}{2 \omega_1} (\alpha + i\theta_3) = \frac{\pi}{2 \omega_1} (\omega_1 - \beta + i\theta_3) = \left(\frac{\pi}{2} + a\right) + ib$$

$$\frac{\pi(Z+2\beta)}{2 \omega_1} = \frac{\pi}{2 \omega_1} (\alpha + \beta + \beta + i\theta_3) = \frac{\pi}{2 \omega_1} (\omega_1 + \beta + i\theta_3) = \left(\frac{\pi}{2} + a\right) + ib$$

- pour le cercle K_2 :

$$\frac{\pi Z}{2 \omega_1} = \frac{\pi}{2 \omega_1} (-\beta + i\theta_3) = a + ib$$

$$\frac{\pi(Z+2\beta)}{2 \omega_1} = \frac{\pi}{2 \omega_1} (\beta + i\theta_3) = a + ib$$

D'après la formule (15) page 109 le premier crochet de la formule (32) s'écrit :

- pour le cercle K_1 :

$$\frac{2\eta_1}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} + a + ib - \frac{\pi}{2} + a - ib \right) + \frac{\pi}{2 \omega_1} \left(\frac{\sin(\pi+2a) - i \operatorname{sh} b}{\operatorname{ch} 2b - \cos(\pi+2a)} - \frac{\sin(\pi-a) - i \operatorname{sh} 2b}{\operatorname{ch} 2b - \cos(\pi-2a)} \right)$$

$$+ \frac{2\pi q^2}{(1-q^2)\omega_1} (\sin(\pi+2a) \operatorname{ch} 2b + i \cos(\pi+2a) \operatorname{sh} 2b - \sin(\pi-a) \operatorname{ch} 2b - i \cos(\pi-a) \operatorname{sh} 2b) =$$

$$\frac{4 \eta_1 a}{\pi} - \frac{\pi}{2 \omega_1} \left(\frac{\sin 2a + i \operatorname{sh} b}{\operatorname{ch} 2b + \cos 2a} + \frac{\sin 2a - i \operatorname{sh} b}{\operatorname{ch} 2b + \cos 2a} \right) - \frac{4 \pi q^2 \sin 2a \operatorname{ch} 2b}{\omega_1 (1-q^2)} =$$

$$\frac{4 \eta_1 a}{\pi} - \frac{\pi}{\omega_1} \frac{\sin 2a}{\operatorname{ch} 2b + \cos 2a} - \frac{4 \pi q^2 \sin 2a \operatorname{ch} 2b}{\omega_1 (1-q^2)}$$

- pour le cercle K_2 :

$$\frac{2\eta_1}{\pi}(a+ib-a+ib) + \frac{\pi}{2\omega_1} \frac{(\sin 2a - i \operatorname{sh} 2b) - (-\sin 2a - i \operatorname{sh} 2b)}{\operatorname{ch} 2b - \cos 2a} +$$

$$\frac{2\pi q^2}{(1-q^2)\omega_1^2} (\sin 2a \operatorname{ch} 2b + i \cos 2a \operatorname{sh} 2b + \sin 2a \operatorname{ch} 2b - i \cos 2a \operatorname{sh} 2b) =$$

$$\frac{4\eta_1 a}{\pi} + \frac{\pi}{\omega_1} \frac{\sin 2a}{\operatorname{ch} 2b - \cos 2a} + \frac{4\pi q^2}{(1-q^2)\omega_1^2} \sin 2a \operatorname{ch} 2b$$

Quant au second crochet de la formule (32), il s'écrit d'après la formule (16) (page 109)

- pour le cercle K_1 :

$$\left[\cos \alpha + i \sin \alpha \right] \left[\frac{\eta_1}{\omega_1} + \frac{\pi^2}{2\omega_1^2} \frac{1 + \cos 2a \operatorname{ch} 2b + i \sin 2a \operatorname{sh} 2b}{(\operatorname{ch} 2b + \cos 2a)^2} - \frac{2\pi^2 q^2}{\omega_1^2 (1-q^2)} (-\cos 2a \operatorname{ch} 2b + i \sin 2a \operatorname{sh} 2b) \right]$$

$$+ \left[-\cos \alpha + i \sin \alpha \right] \left[-\frac{\eta_1}{\omega_1} + \frac{\pi^2}{2\omega_1^2} \frac{1 + \cos 2a \operatorname{ch} 2b - i \sin 2a \operatorname{sh} 2b}{(\operatorname{ch} 2b + \cos 2a)^2} - \frac{2\pi^2 q^2}{\omega_1^2 (1-q^2)} (-\cos 2a \operatorname{ch} 2b - i \sin 2a \operatorname{sh} 2b) \right]$$

$$= 2i \sin \alpha \left[-\frac{\eta_1}{\omega_1} + \frac{\pi^2}{2\omega_1^2} \frac{(1 + \cos 2a \operatorname{ch} 2b)}{(\operatorname{ch} 2b + \cos 2a)^2} + \frac{2\pi^2 q^2 \cos 2a \operatorname{ch} 2b}{\omega_1^2 (1-q^2)} \right] + i \cos \alpha \sin 2a \operatorname{sh} 2b \left[\frac{4\pi^2 q^2}{\omega_1^2 (1-q^2)} + \frac{\pi^2}{\omega_1^2 (\operatorname{ch} 2b + \cos 2a)^2} \right]$$

de même pour le cercle K_2 on a :

$$\left[\cos \alpha + i \sin \alpha \right] \left[-\frac{\eta_1}{\omega_1} + \frac{\pi^2}{2\omega_1^2} \frac{1 - \cos 2a \operatorname{ch} 2b - i \sin 2a \operatorname{sh} 2b}{(\operatorname{ch} 2b - \cos 2a)^2} - \frac{2\pi^2 q^2}{\omega_1^2 (1-q^2)} (\cos 2a \operatorname{ch} 2b - i \sin 2a \operatorname{sh} 2b) \right]$$

$$+ \left[-\cos \alpha + i \sin \alpha \right] \left[\frac{\eta_1}{\omega_1} + \frac{\pi^2}{2\omega_1^2} \frac{1 - \cos 2a \operatorname{ch} 2b + i \sin 2a \operatorname{sh} 2b}{(\operatorname{ch} 2b - \cos 2a)^2} - \frac{2\pi^2 q^2}{\omega_1^2 (1-q^2)} (\cos 2a \operatorname{ch} 2b + i \sin 2a \operatorname{sh} 2b) \right]$$

$$= 2i \sin \alpha \left[\frac{\eta_1}{\omega_1} + \frac{\pi^2}{2\omega_1^2} \frac{1 - \cos 2a \operatorname{ch} 2b}{(\operatorname{ch} 2b - \cos 2a)^2} + \frac{2\pi^2 q^2 \cos 2a \operatorname{ch} 2b}{\omega_1^2 (1-q^2)} \right] - i \cos \alpha \sin 2a \operatorname{sh} 2b \left[\frac{2\pi^2}{\omega_1^2 (1-q^2)} + \frac{4\pi^2 q^2}{\omega_1^2 (\operatorname{ch} 2b - \cos 2a)^2} \right]$$

Finalement la formule numérique qui donne la vitesse dans le plan Z s'écrit :

Pour le côté du rectangle, d'équation $X = -\beta$ et correspondant au cercle K_1

$$W = -\frac{i\Gamma}{2\pi} \left[-\frac{2\eta_1\beta}{\omega_1} - \frac{\pi}{\omega_1} \frac{\sin 2a}{\operatorname{ch} 2b + \cos 2a} + \frac{4\pi q^2}{\omega_1 (1-q^2)} \sin 2a \operatorname{ch} 2b \right] + i x$$

$$- 4c V_0 i \sin \alpha \left[-\frac{\eta_1}{\omega_1} + \frac{1 + \cos 2a \operatorname{ch} 2b}{\omega_1 (\operatorname{ch} 2b + \cos 2a)^2} + \frac{2\pi^2 q^2}{\omega_1^2 (1-q^2)} (\cos 2a \operatorname{ch} 2b) \right] \quad (35)$$

$$- 4c V_0 i \cos \alpha \left[\frac{\pi^2}{2\omega_1^2} \frac{\sin 2a \operatorname{sh} 2b}{(\operatorname{ch} 2b + \cos 2a)^2} - \frac{2\pi^2 q^2}{\omega_1^2 (1-q^2)} \sin 2a \operatorname{sh} 2b \right]$$

Pour le côté du rectangle, d'équation $X = \alpha$ et correspondant au cercle K_2

$$W = -\frac{i\Gamma}{2\pi} \left[-\frac{2\eta_1\beta}{2\omega_1} - \frac{\pi}{\omega_1} \frac{\sin 2a}{\operatorname{ch} 2b - \cos 2a} + \frac{4\pi q^2}{\omega_1(1-q^2)} \sin 2a \operatorname{ch} 2b \right] + ix$$

$$+ 4c V_o i \sin \alpha \left[-\frac{\eta_1}{\omega_1} + \frac{\pi^2}{2\omega_1^2} \frac{1 + \cos 2a \operatorname{ch} 2b}{(\operatorname{ch} 2b + \cos 2a)^2} + \frac{2\pi^2 q^2}{\omega_1^2(1-q^2)} \cos 2a \operatorname{ch} 2b \right] \quad (36)$$

$$- 4c V_o i \cos \alpha \left[-\frac{\pi^2}{2\omega_1^2} \frac{\sin 2a \operatorname{sh} 2b}{(\operatorname{ch} 2b - \cos 2a)^2} + \frac{2\pi^2 q^2}{\omega_1^2(1-q^2)} \sin 2a \operatorname{sh} 2b \right]$$

2-6 - REMARQUE - LES DEUX CERCLES ONT MEME RAYON.

On a alors

$$\alpha = \beta = \frac{\pi}{2} \quad \text{soit} \quad a = -\frac{\pi\beta}{2\omega_1} = -\frac{\pi}{4}$$

et la formule (35) s'écrit :

$$W = -\frac{i\Gamma}{2\pi} \left[-\frac{2\eta_1\beta}{\omega_1} + \frac{\pi}{\omega_1 \operatorname{ch} 2b} + \frac{4\pi q^2 \operatorname{ch} 2b}{(1-q^2)\omega_1} \right] + ix - 4c V_o i \left[\sin \alpha \left(\frac{\eta_1}{\omega_1} + \frac{\pi^2}{2\omega_1^2 \operatorname{ch}^2 2b} \right) + \cos \alpha \operatorname{sh} 2b \frac{\pi^2}{\omega_1^2} \left(\frac{-1}{2 \operatorname{ch}^2 2b} + \frac{2q^2}{1-q^2} \right) \right]$$

Quant à la formule (36), elle devient :

$$W = -\frac{i\Gamma}{2\pi} \left[-\frac{2\eta_1\beta}{\omega_1} + \frac{\pi}{\omega_1 \operatorname{ch} 2b} + \frac{4\pi q^2 \operatorname{ch} 2b}{\omega_1(1-q^2)} \right] + ix - 4c V_o i \left[\sin \alpha \left(\frac{\eta_1}{\omega_1} + \frac{\pi^2}{2\omega_1^2 \operatorname{ch}^2 2b} \right) + \cos \alpha \operatorname{sh} 2b \frac{\pi^2}{\omega_1^2} \left(\frac{+1}{2 \operatorname{ch}^2 2b} - \frac{2q^2}{1-q^2} \right) \right]$$

On trouvera dans la partie réservée aux exemples plusieurs calculs de ces diverses formules.

CHAPITRE III

TRANSFORMATION CONFORME DE DEUX CERCLES D'UN MÊME PLAN EN DEUX PROFILS

Chapitre III

TRANSFORMATION CONFORME DE DEUX CERCLES EN DEUX PROFILS D'AILE D'UN MEME PLAN - (Allongement infini)

3-1 - PRINCIPE.

Nous rappellerons ici le principe de cette transformation, qui a déjà fait l'objet d'une communication (C.R.A.S. tome 215 pages 400 - 401).

Soient deux cercles K_1 et K_2 extérieurs l'un à l'autre d'un même plan z . Prenons comme centre des coordonnées de ce plan un point intérieur au cercle K_1 par exemple de telle façon que ce cercle se transforme en un profil à pointe dans le plan ξ par une transformation conforme quelconque (dans le cas de la figure de la page 50 nous avons pris pour simplifier une transformation de Joukowski du type

$$\xi = z + \frac{d^2}{z} \quad (37)$$

avec $d = O_1I$.

Le second cercle K_2 se transformera aussi en passant dans le plan ξ . Il deviendra un contour fermé L_2 mais naturellement sans pointe puisque K_2 est extérieur au cercle K_1 . Prenons alors une nouvelle origine O' des coordonnées à l'intérieur du contour L_2 . Si, pour passer dans un plan ζ nous effectuons une nouvelle transformation conforme par exemple du genre de celle de Joukowski

$$\zeta = \xi' + \frac{c^2}{\xi'}$$

(c étant la distance de l'origine à un point du contour L_2 et $\xi' = \overrightarrow{O'O} + \xi$) ce contour L_2 va devenir un nouveau contour M_2 à pointe tandis que le contour L_1 se transformera en un contour M_1 de même nature que L_1 puisque celui-ci est extérieur à L_2 .

REMARQUE -

On peut reprocher à ces transformations de n'être pas symétriques, c'est-à-dire de ne pas agir également ou au moins de la même façon sur les deux cercles. La transformation d'un des cercles par exemple K_1 en un profil L_1 , fait varier l'autre contour d'une manière assez "intempestive". En réalité, le but que nous nous sommes proposé dans cette étude étant essentiellement pratique, nous n'avons jamais cherché une rigueur que ne sauraient atteindre les résultats expérimentaux dont nous nous sommes servis. Cette condition posée, on pourra remarquer dans les exemples suivants, que l'action d'une transformation sur un contour qu'elle n'intéresse pas directement est, soit négligeable, (au moins du point de vue déplacement), soit calculable ou prévisible. Nous n'insisterons pas sur ces calculs et sur ces prévisions; on trouvera avec les exemples traités (biplans à profils égaux et décalés; calcul de l'action du sol

sur une aile, ce qui revient, par la méthode des images, à l'étude d'un biplan droit; aile à fente avant c'est-à-dire aile avec un bec de sécurité), le raisonnement correspondant qui nous a conduit à prendre des cercles initiaux bien déterminés.

3-2 - LE CAS DE L'AILE A FENTE ARRIERE (dispositif hyper-sustentateur).

Dans les cas que nous avons rappelés ci-dessus, les profils obtenus par transformation de deux cercles sont toujours très près des profils dits "théoriques" (*c'est-à-dire des profils dérivant d'un cercle par une transformation conforme simple*); ceci provient de faits que nous expliquerons par la suite et en particulier de ce que les interactions d'une des transformations sur l'autre sont négligeables. Ce fait n'a pas d'importance puisque l'on s'est depuis longtemps servi de ces profils "théoriques en monoplan" pour des expériences "en biplan" et que par conséquent, les confrontations d'essais avec les calculs, envisagées ici sont faciles à trouver.

Il n'en va pas de même pour certains cas de "cellules biplanes" étudiés dans l'industrie, en particulier dans le cas du dispositif hypersustentateur à un seul volet. En effet, pour des raisons de construction industrielle, le profil principal, que nous appellerons à partir d'ici gros profil par opposition au volet, doit posséder un renflement très accentué vers les $3/4$ arrière de sa corde. D'autre part, une étude complète d'un tel dispositif nécessite les essais avec plusieurs braquages du volet. Ces deux conditions sont impossibles à réaliser pratiquement par deux transformations simples, (*la seconde en particulier, parce que les interactions des deux transformations ne sont pas négligeables ici*).

Nous avons donc été amenés à prendre le problème complètement à l'envers, c'est-à-dire :

"à trouver, étant donnés deux profils d'un même plan, une transformation conforme qui fasse correspondre le domaine extérieur aux deux profils au domaine intérieur à une couronne circulaire dont les rayons des cercles sont à déterminer."

En ce qui concerne l'écoulement à l'intérieur d'une couronne circulaire, on peut très facilement le calculer à partir de l'écoulement à l'intérieur d'un rectangle, comme on va le voir dans la suite.

La théorie de la transformation d'un profil d'aile empirique en un cercle a été faite depuis longtemps. On trouvera dans deux exposés (*Th. Theodorsen - Rapport N.A.C.A. N° 411, et Girerd - Servanty - Aérotechnique, 1938, N° 190, pages 133-140*) les résultats des méthodes employées. En particulier, on pourra se reporter à la seconde note pour des détails de calcul ou de constructions que l'on retrouvera ici. Du reste, la méthode que nous emploierons, est une généralisation au cas de deux profils de celle de Girerd et Servanty.

Nous admettrons la possibilité mathématique de cette transformation de deux profils en deux cercles. On se reportera pour la démonstration au Fascicule XIV des Cahiers Scientifiques (*G. Julia : Leçons sur la représentation conforme des aires multiplément connexes*).

Alors, la méthode employée ici est en théorie extrêmement simple. Il n'en est pas de même dans la pratique comme on le verra dans l'exemple numérique traité ci-après. Appelons P le gros profil, R le volet; de même que pour un seul

profil on cherche à transformer P et R par des transformations simples du genre de la transformation inverse de celle de Joukowski, en deux contours P_1 et R_1 extérieurs l'un à l'autre comme P et R et qui aient chacun, la forme la plus près possible d'un cercle.

Soit ζ_1 le plan des deux contours P_1 et R_1 (Voir figure page 99). Par une simple inversion avec un centre bien déterminé on peut passer de P_1 et R_1 à deux contours P_2 et R_2 dont l'un est intérieur à l'autre, de telle sorte que P_2 et R_2 soient maintenant presque circulaires et presque concentriques dans le plan ζ_2 ; c'est-à-dire si l'on choisit dans le plan ζ_2 un centre, les rayons vecteurs des deux contours ne doivent pas différer de plus d'une valeur ε_P ou ε_R que nous fixerons dans la suite des rayons de deux cercles P_3 et R_3 à déterminer. Bien entendu le domaine extérieur à P_1 et R_1 devient dans le plan ζ_2 le domaine compris entre P_2 et R_2 . Ces transformations étant faites, - et il n'y a pas de difficultés particulières, sauf de grandes précautions, - le problème posé revient au suivant :

"représenter l'aire comprise entre deux contours presque circulaires et presque concentriques, au sens où nous l'avons indiqué ci-dessus, sur l'aire comprise entre deux cercles concentriques."

Nous allons approfondir la solution pratique de ce problème.

En employant la méthode Girerd Servanty, nous sommes conduits à prendre une fonction de transformation de la forme

$$\zeta_3 = \zeta_2 e^{H(\zeta_2)} \quad (38)$$

avec les notations précédentes.

Cela nous conduit à déterminer à la fois la fonction $H(\zeta_2)$ et les rayons des deux cercles P_3 et R_3 .

Imaginons pour un instant que nous connaissons ces deux rayons et prenons, (à la rigueur après un changement d'échelle sans importance ici) la longueur du plus grand égale à l'unité et celle du plus petit égale à q . Nous prendrons de plus, le centre commun O_3 de ces cercles comme origine du plan ζ_3 et le pseudo centre O_2 choisi dans le plan ζ_2 comme origine de ce plan.

D'après la formule (38) et en appelant $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ les parties respectivement réelle et imaginaire de la fonction H , on peut toujours écrire sur les contours P_2 et P_3 :

$$|\zeta_3| = |\zeta_2 e^{H(\zeta_2)}| = 1$$

ou en prenant les logarithmes

$$\text{Log } |\zeta_3| = \text{Log } |\zeta_2| + \mathcal{P} = 0$$

Soit enfin la relation fondamentale :

$$\mathcal{P} = - \text{Log } |\zeta_2| = - \text{Log } r_{P_2}$$

De la même façon, pour R_2 et R_3 , il vient :

$$\text{Log } |\zeta_3| = \text{Log } |\zeta_2| + \mathcal{P} = \text{Log } q$$

$$\mathcal{P} = -\text{Log } \left| \frac{\zeta_2}{q} \right| = -\text{Log } \frac{r_{R_2}}{q}$$

Ainsi nous connaissons la valeur de la partie réelle de $H(\zeta_2)$ sur les deux contours P_2 et R_2 . Or, d'après M. Villat nous savons déterminer une fonction analytique dans le domaine formé par une couronne circulaire lorsque l'on connaît la partie réelle de cette fonction sur les deux cercles frontières du domaine. Nous admettrons en première approximation que la fonction $H(\zeta_2)$ est la même que la fonction $H'(\zeta_2)$ dont la partie réelle sur les deux cercles P_3 et R_3 est $\mathcal{P}$.

Nous disons : "en première approximation", et l'on comprend mieux maintenant le fait de choisir des contours P_2 et R_2 , qui soient aussi près de cercles que possible; cette approximation en sera d'autant meilleure. Nous allons voir, d'après M. Villat, où nous conduisent les calculs de cette fonction. Nous ferons au paravant une simplification, déjà notée et justifiée par Girerd et Servanty, quant à l'erreur commise numériquement :

Avec les notations précédentes, le rayon vecteur de P_2 s'écrit $r_{P_2} = 1 + \varepsilon_P$ puisque le rayon de P_3 est 1, et le rayon vecteur de R_2 : $q(1 + \varepsilon_R)$ puisque le rayon de R_3 est q . On a donc en développant :

$$\text{Log } (r_{P_2}) = \text{Log}(1 + \varepsilon_P) = \varepsilon_P - \frac{\varepsilon_P^2}{2} + \frac{\varepsilon_P^3}{3} - \frac{\varepsilon_P^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{\varepsilon_P^n}{n}$$

On peut donc écrire :

$$\text{Log}(r_{P_2}) = \varepsilon_P; \quad \text{Log } \frac{r_{R_2}}{q} = \varepsilon_R$$

L'erreur commise en négligeant les termes de degré supérieur à 1 est inférieure à $\frac{\varepsilon_P^2}{2}$ ou à $\frac{\varepsilon_R^2}{2}$. Notons par exemple que l'on peut facilement obtenir une valeur de ε_P ou de ε_R inférieure à 4 %. L'erreur commise est donc inférieure à : $0,5 \times 0,04 \times 0,04 = 0,0008$, c'est-à-dire à moins de 1/1.000.

La fonction $H'(\zeta_2)$ est développable en série de Laurent et peut donc se mettre sous la forme :

$$H'(\zeta_2) = a_0 + \sum_1^{\infty} a_n \zeta_2^n + \sum_1^{\infty} b_n \zeta_2^{-n}$$

les coefficients a_n (y compris a_0) et b_n étant imaginaires, de la forme :

$$a_n = \alpha_n + i\beta_n \quad b_n = \gamma_n + i\delta_n$$

"les lettres grecques désignant des nombres réels". Pour le cercle P_3 de rayon 1, posons $\zeta_2 = e^{i\theta}$. Nous devons alors avoir nécessairement :

$$-\text{Log } r_{P_2} = -\varepsilon_P(\theta) = \alpha_0 + \sum_1^{\infty} [(\alpha_n + \gamma_n) \cos \theta - (\beta_n - \delta_n) \sin n\theta]$$

De même, sur le petit cercle, nous aurons $\zeta_2 = q e^{i\theta}$ et par suite :

$$\text{Log } \frac{r_2}{q} = -\varepsilon_R(\theta) = \alpha_0 + \sum [(\alpha_n q^n + \gamma_n q^{-n}) \cos \theta - (\beta_n q^n + \delta_n q^{-n}) \sin \theta]$$

En supposant que les deux fonctions $\varepsilon_P(\theta)$ et $\varepsilon_R(\theta)$ soient développables en série trigonométrique, on en déduit la valeur des coefficients α_n , β_n , γ_n et δ_n , d'après Fourier. En effet les deux dernières formules donnent :

$$\alpha_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} -\varepsilon_P(\theta) d\theta \qquad \alpha_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} -\varepsilon_R(\theta) d\theta \quad (39)$$

$$\alpha_n + \gamma_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} -\varepsilon_P(\theta) \cos n\theta d\theta \qquad \alpha_n q^n + \gamma_n q^{-n} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} -\varepsilon_R(\theta) \cos n\theta d\theta \quad (40)$$

$$-\beta_n + \delta_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} -\varepsilon_P(\theta) \sin n\theta d\theta \qquad -\beta_n q^n + \delta_n q^{-n} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} -\varepsilon_R(\theta) \sin n\theta d\theta \quad (41)$$

On voit que les deux formules (39) donnent deux expressions distinctes pour α_0 . "L'égalité de ces deux expressions donne la condition d'uniformité nécessaire pour que le problème soit possible" :

$$\int_0^{2\pi} \varepsilon_P(\theta) d\theta = \int_0^{2\pi} \varepsilon_R(\theta) d\theta$$

C'est, du reste, la seule condition du problème. Elle nous imposera donc pratiquement le rapport des longueurs des rayons ($q/1$) lorsque l'on aura choisi un centre O_3 . Des formules suivantes (40) et (41), on tire facilement :

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \frac{-1}{\pi(1-q^{2n})} \int_0^{2\pi} [\varepsilon_P(\theta) - q^n \varepsilon_R(\theta)] \cos n\theta d\theta & 1 \\ \beta_n &= \frac{-1}{\pi(1-q^{2n})} \int_0^{2\pi} [-\varepsilon_P(\theta) + q^n \varepsilon_R(\theta)] \sin n\theta d\theta & 2 \\ \gamma_n &= \frac{-1}{\pi(1-q^{-2n})} \int_0^{2\pi} [\varepsilon_P(\theta) - q^{-n} \varepsilon_R(\theta)] \cos n\theta d\theta & 3 \\ \delta_n &= \frac{-1}{\pi(1-q^{-2n})} \int_0^{2\pi} [\varepsilon_P(\theta) - q^{-n} \varepsilon_R(\theta)] \sin n\theta d\theta & 4 \end{aligned} \quad (42)$$

ce qui donne la valeur de tous les coefficients désirés. Partant de ceux-ci, M. Villat montre que l'on peut donner la fonction $H'(\zeta_2)$ sous une forme plus simplifiée, en apparence du moins. En effet, elle peut s'écrire :

$$H'(\zeta_2) = \alpha_0 + \frac{i\omega_1}{\pi^2} \int_0^{2\pi} -\varepsilon_P(\theta) \zeta_2 \left(\frac{i\omega_1}{\pi} \text{Log } \zeta_2 - \frac{\omega_1}{\pi} \theta \right) d\theta - \frac{i\omega_1}{\pi^2} \int_0^{2\pi} -\varepsilon_R(\theta) \zeta_3 \left(\frac{i\omega_1}{\pi} \text{Log } \zeta_2 - \frac{\omega_1}{\pi} \theta \right) d\theta \quad (43)$$

(1) - Les lettres ζ et ζ_3 devant les parenthèses indiquent ici les fonctions elliptiques du même nom.

Mais elle nécessite l'emploi des fonctions elliptiques et deux intégrations pour chaque point calculé. Par ailleurs, nous aurons besoin de la dérivée de cette fonction $H(\zeta_2)$ et nous avons préféré prendre pour les calculs numériques les formules (42), du reste légèrement modifiées, comme on le verra dans la partie réservée au calcul numérique, justement pour permettre ce calcul.

Quoiqu'il en soit, par la formule (43) ou par les formules (42) nous connaissons, d'une manière aussi exacte que l'on veut, la fonction $H'(\zeta_2)$. Nous avons admis que la fonction

$$\zeta_2 e^{H'(\zeta_2)} \quad (44)$$

faisait passer les points des contours P_2 et R_2 sur les cercles P_3 et R_3 . Le problème de représentation conforme est alors complètement résolu. Il y a là cependant une approximation que l'on peut réduire de la façon suivante : la fonction (44) fait passer en réalité d'un des contours par exemple P_2 à un autre contour P_{2a} bien plus voisin du cercle P_3 que le contour P_2 . En conséquence, il serait théoriquement nécessaire de recommencer une infinité de fois la transformation précédente pour arriver à confondre le contour P_2 avec le cercle P_3 . On verra, dans les calculs numériques qu'une seule fois suffit, si l'on a pris la précaution de choisir les contours P_2 et R_2 comme nous l'avons dit plus haut.

Pour terminer cette suite de transformations conformes, nous noterons que l'on passe du plan ζ_3 au plan du rectangle de Lagally en employant une transformation simple :

$$\zeta_4 = c_0 - \text{Log } \zeta_3 \quad (45)$$

Nous indiquerons par la suite, la valeur de la constante. Cette transformation fait passer de l'aire intérieure à une couronne circulaire à l'aire intérieure à un rectangle périodique verticalement dans le plan ζ_4 (période $2i\pi$).

3-3 - CALCUL DES EFFORTS.

Les calculs faits dans les paragraphes précédents permettent de déterminer par l'une des méthodes indiquées ci-dessous, les efforts locaux et globaux sur chacun des profils précédents.

3-31 - Efforts locaux.

En ce qui concerne les efforts locaux, les calculs de vitesse que nous venons de faire nous y conduisent immédiatement.

En effet, si nous écrivons que pour chaque point de l'un quelconque des profils la vitesse est liée à la pression qui s'exerce en ce point par la relation de Bernouilli :

$$p + \frac{1}{2} \rho V^2 = A$$

et qu'on a de même à l'infini :

$$p_0 + \frac{1}{2} \rho V_0^2 = A$$

(V étant égale au module de la dérivée du potentiel), on en déduit que :

$$C_p = \frac{p}{p_0} = 1 - \frac{V^2}{V_0^2}$$

On prend généralement C_p comme coefficient de pression. Il indique la valeur de l'effort en chaque point, p , par rapport à la pression à l'infini. Nous prendrons toujours, dans le plan des profils, $V_0 = 1$, de sorte que :

$$C_p = 1 - V^2$$

3-32 - Efforts globaux.

En ce qui concerne les efforts globaux, on peut songer à employer diverses méthodes :

3-321 - CALCUL DE LA FORMULE DE BLASIUS.

Supposons que nous ayons, dans le plan z un contour A qui dérive du contour B du plan Z par la transformation conforme $z(Z)$ et qu'un écoulement quelconque autour de B soit défini par le potentiel $F(Z)$. Les efforts totaux qui s'exercent sur le contour A sont donnés par la formule :

$$E = E_x - i E_y = i \oint_B \left(\frac{df}{dz} \right) \frac{dZ}{dz} dz$$

Nous avons donné cet exemple pour montrer la simplicité apparente de cette formule. En réalité, lorsque l'on emploie un potentiel du genre de celui que nous avons indiqué à la fin du Chapitre II et deux transformations conformes successives, même simples, le calcul de E est parfaitement inextricable, du moins en ce qui concerne le calcul numérique.

3-322 - INTEGRATION DES PRESSIONS LOCALES.

La formule précédente, due à Blasius, est l'aboutissement mathématique de l'application de la relation purement physique à l'origine de Bernouilli.

Nous pouvons donc, dans les exemples suivants, reprendre le raisonnement de Blasius, mais en restant toujours dans le domaine du calcul numérique (*Voir Pérès Mécanique des Fluides Chapitre V - III*).

Soit un contour quelconque C placé dans un courant quelconque soient α et β les cosinus directeurs de la normale extérieure au contour en un élément ds de celui-ci. Les composantes de la force exercée par le courant sur cet élément ds sont :

$$dE(x) = p \alpha ds \quad dE(y) = -p \beta ds$$

Or, en orientant C dans le sens trigonométrique et en appelant dx et dy les composantes de l'élément ds , il vient :

$$dx = \beta ds \quad dy = \alpha ds$$

On en déduit donc que la force F_y perpendiculaire à l'axe O_x est : $F_y = \int p dx$ et la force perpendiculaire à l'axe O_y : $F_x = - \int p dy$.

C'est, dans le calcul numérique, la méthode la plus simple et celle que nous avons employée le plus souvent dans la suite.

En remplaçant dans les deux équations précédentes p par le coefficient sans dimensions C_p , et dx , dy par dx/l , dy/l (l étant la longueur de référence du contour); en prenant d'autre part l'axe Ox parallèle à la direction générale du courant, on obtient les coefficients bien connus de l'aérodynamique expérimentale

$$C_z = \int C_p d(x/l)$$

$$C_x = - \int C_p d(y/l)$$

3-323 - CALCUL DES INTERACTIONS DES SINGULARITES.

On montre facilement que la formule de Blasius permet de calculer les actions mutuelles de singularités du potentiel.

Par exemple, la formule de Joukowski $P = \rho V_0 \Gamma e^{i(\alpha - \pi/2)}$ est une application immédiate de celle de Blasius, et donne la valeur de la charge totale P sur un profil en fonction de la circulation Γ autour de ce profil et de la vitesse à l'infini $V_0 e^{i\alpha}$ dans un écoulement sans autre singularité. Cette formule peut être obtenue par le calcul très général des interactions de singularités (Ici action d'un courant de potentiel $f_1(z) = V e^{i\alpha} z$ sur un tourbillon de circulation Γ et de potentiel $f_2(z) = -\frac{i\Gamma}{2\pi} \text{Log}(z-z_0)$).

De la même façon, on peut calculer les actions mutuelles de deux tourbillons, ou d'un tourbillon et d'un doublet (Voir Pérès : *Mécanique des Fluides Chapitre VI*). La force exercée sur un tourbillon est toujours donnée par la règle de Joukowski; elle est donc perpendiculaire à la vitesse induite par toute singularité extérieure. En ce qui concerne sa valeur absolue, elle est directement proportionnelle à la circulation du tourbillon et à la vitesse induite au point où il se trouve placé.

Ces résultats, obtenus une fois pour toutes, permettent, en fait, lorsque le potentiel résultant est très compliqué de fractionner en éléments séparés la formule de Blasius et de résoudre chacune des intégrales correspondantes.

On verra dans la suite un exemple d'emploi de cette méthode (*Exemples numériques Chapitre V Biplan et Interaction-sol*).

CHAPITRE IV

EXEMPLE NUMERIQUE

AILE A FENTE AVANT

EXEMPLE NUMERIQUE

Chapitre IV

AILE A FENTE AVANT

4-1 - GENERALITES.

L'aile à fente avant constitue l'exemple le plus complet de la méthode directe de transformation de deux cercles en deux profils, car il s'agit en effet de passer de deux cercles de rayons différents à deux profils différents constituant une aile avec bec de sécurité.

Du point de vue pratique, un tel bec avant, *constitué en réalité par un petit profil, auxiliaire, mais indépendant*), permet d'augmenter l'incidence du gros profil qu'il accompagne dans de grandes proportions avant que celui-ci ne "décroche". On est assez mal renseigné ⁽¹⁾ sur les efforts qui s'exercent sur les deux profils et cependant les résultats que l'on trouvera ici montrent que cette question est importante : Aux grandes incidences, le petit profil supporte à lui seul le tiers de la charge totale ⁽²⁾.

4-2 - ETUDE DES TRANSFORMATIONS.

(Voir la Figure 4 -1 de la page 50).

Nous partons donc de deux cercles K_1 et K_2 du plan z . Pour arriver aux deux profils M_1 et M_2 , nous emploierons deux transformations de Joukowski successives. Théoriquement, ce sont les transformations les plus simples et par conséquent la seule condition théorique qui nous est imposée de ce fait est que les deux profils n'aient pas de dièdre à la pointe; théoriquement encore les conditions d'épaisseur des deux profils, de longueur et de position relative sont calculables avec précision. Pratiquement, il n'en est pas tout à fait de même; les conditions imposées ne sont satisfaites que partiellement surtout en ce qui concerne la forme et la position du bec avant. Nous avons donc eu à faire certains tâtonnements, du reste assez rapides qui nous ont conduits à partir des éléments suivants (que l'on retrouvera en partie dans le tableau II):

Rayon du grand cercle K_2 : 166,2

Rayon du petit cercle K_1 : 37,4

Distance des centres d = 246

aux profils dont les caractéristiques sont indiquées dans le tableau page suivante(48).

(1)- Les résultats américains sur des ailes avec bec de sécurité, constituées par des profils empiriques, sont assez imprécis. (Pas d'indication de point de vitesse nulle).

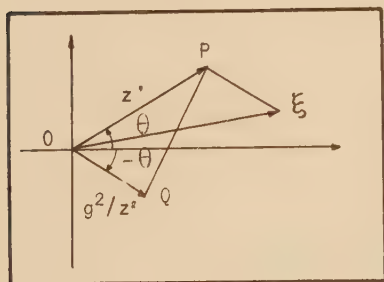
(2)- Une confirmation de ce phénomène est donnée par les Notes Techniques GRA N° 49 et 66 de J. LACAINE.

La première des deux transformations opérées sert à faire passer du petit cercle K_1 à un profil Joukowsky L_1 . Comme il a déjà été indiqué, le grand cercle K_2 se transforme à peine (contour L_2). Si l'on avait d'abord transformé le grand cercle K_2 en un profil, la déformation de K_1 aurait été par contre si importante qu'il eût été par la suite beaucoup plus difficile de transformer ce nouveau contour en un profil destiné à être le petit bec avant. L'axe de la transformation fait un angle de 43° avec la ligne des centres et le petit profil L_1 a 8 % d'épaisseur et 4 % de courbure relative. On verra sur la figure de la page 50 que la direction générale de ce profil se conserve assez bien dans la deuxième transformation, mais qu'il est nécessaire, pour obtenir une courbure correcte de calculer son évolution par avance.

La seconde transformation fait passer du contour L_2 au profil principal M_2 . On voit qu'il est peu différent d'un profil Joukowsky, et par conséquent ses caractéristiques sont calculables et bien déterminées. Par contre, la transformation du petit profil en un bec de bord d'attaque nécessite des calculs d'approximation assez nombreux; nous ne les citerons pas cependant car ils paraissent évidents.

Nous aurons, par la suite, besoin du module de la dérivée des deux fonctions de transformation, en chaque point. Nous rappellerons la méthode classique, (que nous avons employée ici), pour calculer graphiquement le module de la dérivée de la transformation de Joukowsky : (Voir schéma ci-contre). La fonction étant de la forme :

$$\xi = z' + \frac{g^2}{z'}$$



le module de la dérivée est

$$\left| \frac{d\xi}{dz'} \right| = \left| 1 - \frac{g^2}{z'^2} \right| = \left| \left(\frac{1}{z'} \right) (z' - \frac{g^2}{z'}) \right| = \left| \frac{z' - \frac{g^2}{z'}}{z'} \right|$$

Si, par exemple, on a

$$z' = \rho e^{i\theta} \text{ avec } \rho = OP \text{ et } \frac{g^2}{z'} = \rho' e^{-i\theta} \text{ avec } \rho' = OQ$$

il vient donc :

$$\left| \frac{z' - \frac{g^2}{z'}}{z'} \right| = PQ \text{ et par suite : } \left| \frac{d\xi}{dz'} \right| = \frac{PQ}{OP}$$

Ainsi pour les points D_4 et E_4 , correspondants au gros profil et au petit profil, on a

$$\left| \frac{d\xi}{dz} \right| = \left| \frac{d\xi}{d\xi} \right| \left| \frac{d\xi}{dz} \right| = \frac{EE_1}{OE} \frac{E_3E_2}{O'E_2} \text{ et } \left| \frac{d\xi}{dz} \right| = \frac{DD_1}{OD_1} \frac{D_3D_2}{O'D_2}$$

Finalement les caractéristiques des deux profils sont les suivantes :
(Dans notre exemple)

	Gros profil	Petit profil
Epaisseur relative	12.2 %	10.2 %
Courbure relative		10 %
Corde	608	93
Angle des cordes bitangentes : $35^\circ 7'$		

4-3 - CALCUL DES VITESSES, DES PRESSIONS, DES CIRCULATIONS ET DES SUSTENTATIONS THEORIQUES.

La correspondance entre les points des profils et les points des cercles étant établis, le calcul des vitesses dans le plan des profils est assez rapide :

Si $F(z)$ est le potentiel des vitesses dans le plan des cercles, $F(\xi)$ celui du plan des profils, la vitesse en un point G de l'un des profils est

$$V_G = \frac{dF}{d\xi} = \frac{dF}{dz} \frac{dz}{d\xi} \frac{d\xi}{d\xi}$$

Le module de la vitesse qui nous intéresse seul ici est donc

$$V_G = \left| \frac{dF}{dz} \right| \left| \frac{dz}{d\xi} \right| \left| \frac{d\xi}{d\xi} \right|$$

A l'infini, il est donc le même dans les trois plans (z , ξ , et ζ). Nous avons déjà dit que nous le prendrions égal à 1. De même, il serait facile de montrer que dans la superposition des trois plans la direction de cette vitesse à l'infini reste aussi la même.

En réalité les calculs de vitesses et de pressions sont faits à partir du schéma du rectangle périodique; le facteur $\left| \frac{dF}{dz} \right|$ de la formule précédente et qui représente le module de la vitesse dans le plan des cercles est donc déjà le produit du module de la vitesse dans le plan du rectangle par le module de la dérivée de la fonction de transformation qui fait passer du rectangle aux cercles (Voir Chapitre II § 2-3).

Les pressions se déduisent immédiatement des vitesses. Nous n'y reviendrons pas.

Le calcul des circulations partielles autour de chaque cercle se déduit immédiatement (Voir chapitre II § 2-4) de la circulation totale, laquelle est liée à la valeur de la vitesse en deux points quelconques du plan des cercles. En l'occurrence il y a deux points prédestinés pour cette question, ce sont les points des cercles qui correspondent à la pointe arrière de chaque profil. Pour répondre à la condition de Joukowski ces deux points doivent avoir une vitesse nulle.

En ce qui concerne les sustentations nous avons appliqué plusieurs méthodes :

- 1° D'abord la règle de Joukowski pour la sustentation totale.
- 2° Puis l'intégration des courbes de pressions obtenues précédemment pour chacun des deux profils.

Cette deuxième méthode nous a donné une vérification de la première. En faisant la somme, pour une même incidence, des intégrations sur les deux profils et en divisant cette somme par la longueur de référence (*plus grande corde du dispositif, soit 663 mm*) nous avons déterminé des points qui se placent exactement sur la courbe déduite de la circulation totale.

D'autre part cette méthode nous a donné, bien entendu la contribution de chacun des deux profils à la sustentation totale.

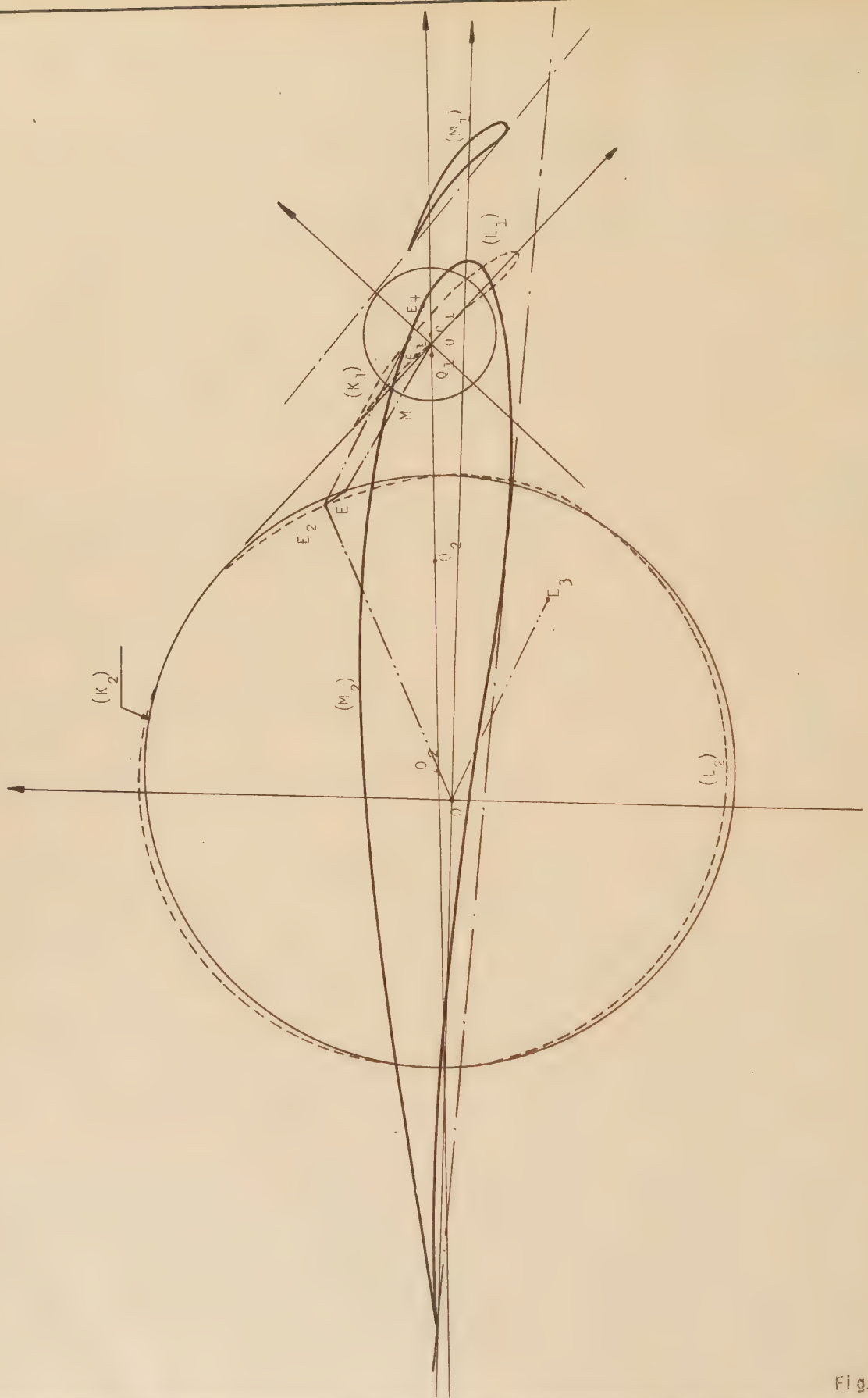


Fig. 4-1

3° - Enfin nous avons essayé d'appliquer à chacune des deux circulations Γ_1 et Γ_2 la règle de Joukowski, comme si elle était encore valable.

Nous allons d'abord indiquer l'ordre dans lequel on trouvera les tableaux contenant les résultats que nous venons d'énoncer, en réservant les conclusions pour la suite.

On verra dans ces tableaux qu'il est plusieurs fois question du gros profil, essayé on calculé seul, sans bec de sécurité. Dans aucun cas, ces calculs et ces essais n'offrent de difficultés (*c'est la simple étude d'un monoplane théorique*) et par contre ils fourniront des points de comparaison extrêmement intéressants entre la théorie et l'expérience.

On trouvera donc :

TABLEAU I (page 54) -

Le résultat des constructions graphiques (*cotes des profils*).

TABLEAU II (page 55) -

Le calcul des principales constantes qui servent au calcul des vitesses dans le plan des cercles (*Chapitre III*).

TABLEAUX III, IV, et VI (pages 56 - 57) -

Le calcul des vitesses pour une incidence et pour chacun des profils.

Les notations sont les suivantes : nous avons désigné par A, B, C, ... G, H, les différentes valeurs indiquées à l'intérieur des crochets des formules (35) et (36) et par K la valeur du produit des modules des dérivées des trois fonctions de transformation qui font passer du rectangle périodique de LAGALLY au contour des deux profils.

TABLEAU V (page 58) -

Le calcul de la circulation totale autour des deux cercles et des deux profils (*puisque'elle reste inchangée dans les transformations*).

PLANCHE IV-I (page 50) -

Le tracé des transformations qui font passer de K_1 et K_2 à M_1 et M_2 .

PLANCHE IV-II (page 59) -

Les pressions sur les deux profils pour diverses incidences et sur le gros profil considéré à l'état isolé.

PLANCHE IV-III (page 60) -

La courbe $C_z(i)$ pour le dispositif hypersustentateur (*corde de référence corde bitangente d'intrados du gros profil*) calculée par la règle de Joukowski et des points de cette courbe calculés par intégration des pressions.

Les courbes $C_{z_1}(i)$ et $C_{z_2}(i)$ pour chacun des profils, calculées par intégration des pressions et par application de la règle de Joukowski.

La courbe $C_z'(i)$ calculée par les deux méthodes pour le gros profil seul, sans bec de sécurité.

4-4 - LES EXPERIENCES.

Le but que nous nous proposons étant une comparaison entre la théorie et l'expérience, nous avons fait à l'Institut Aérotechnique de Saint-Cyr, des essais sur une maquette en bois du même dispositif hypersustentateur.

Cette maquette a été prévue pour permettre la mesure des pressions locales sur le gros profil (*le bec avant étant trop petit pour y installer les tubes qui servent de prise de pressions*) et les essais ont été faits entre panneaux dans la soufflerie N° 1 de l'Institut Aérotechnique. Nous ne décrivons pas les méthodes employées. Ce sont celles qu'ont utilisées M. Carafoli ⁽¹⁾ (*Etude de profils entre panneaux*) et Girerd ⁽²⁾ (*Mesure de pressions*).

Nous avons mesuré :

- 1° -- à la balance aérodynamique la courbe $C_z(i)$ (*coefficient de sustentation totale*) en fonction de l'incidence rapportée à la corde bitangente d'intrados du gros profil;
- 2° -- la courbe $C_z'(i)$ pour le gros profil essayé seul, sans bec de sécurité.
- 3° -- au moyen des prises, les pressions sur le gros profil, essayé seul, puis
- 4° -- essayé en présence du petit profil, pour diverses incidences.

On trouvera :

PLANCHE IV-IV (page 61) --

Les courbes de pressions expérimentales pour le gros profil essayé avec et sans bec de sécurité et pour diverses incidences.

PLANCHE IV-V (page 62) --

La courbe $C_z(i)$ pour le dispositif entier et la courbe $C_z'(i)$ pour le gros profil essayé seul. Les points résultants de l'intégration des courbes des pressions expérimentales précédentes.

4-5 - COMPARAISON ENTRE LA THEORIE ET L'EXPERIENCE. -

CONCLUSION.

Une comparaison à faire est de confronter les deux méthodes de mesure de la sustentation totale : mesure directe, et au moyen de l'intégration des courbes de pressions, dans les deux cas du calcul et des essais.

Cette comparaison peut être faite par exemple sur le gros profil calculé sans bec de sécurité. Le résultat est remarquable. Dans les deux cas, les chiffres trouvés par les deux méthodes diffèrent de moins de 1 %; nous sommes donc ainsi bien certain que, lorsque la détermination totale est impossible par mesure directe, l'intégration des pressions nous fournira une très bonne approximation.

C'est ainsi que nous avons déterminé les sustentations partielles sur chacun des deux profils du dispositif.

Dans le cas du calcul, nous avons intégré séparément les courbes de chacun des profils. La somme des deux intégrations redonne bien, pour chaque incidence, la valeur de la sustentation totale obtenue directement par la règle de Joukowski.

(1) - Recherches expérimentales sur les ailes monoplanes - Pub. S et T du Ministère de l'Air N° 8.

(2) - Contribution à l'étude expérimentale du biplan d'envergure infinie - Pub. S et T du Ministère de l'Air N° 58.

Dans le cas des essais, au contraire, nous avons soustrait de la courbe de sustentation totale, la valeur de la sustentation du gros profil obtenu par intégration des pressions pour diverses incidences, afin de pouvoir atteindre les valeurs de la sustentation du bec de sécurité.

En ce qui concerne les comparaisons entre la théorie et l'expérience elle-même, un premier fait à signaler est la différence de plus de 1° entre les angles de portance nulle. Ce phénomène s'explique pour deux raisons:

1° - une différence moins grande, mais réelle existe déjà entre les angles de portance nulle du gros profil seul, calculé et mesuré en soufflerie. Cela peut provenir d'une légère déformation du profil théorique.

2° - d'autre part la fente expérimentale ne commence à jouer un rôle que lorsque l'incidence est suffisamment grande; on voit en effet, vers $8^\circ 5'$ sur la courbe expérimentale $C_z(i)$ un changement de pente très net avec augmentation. Ceci s'explique par le fait que le bec de sécurité masque complètement aux petites incidences l'ouverture de cette fente. Il n'en reste pas moins que justement vers les petites incidences les comparaisons sont complètement faussées par des phénomènes dissemblables dans la théorie et dans la pratique.

En ce qui concerne les pentes des courbes $C_z(i)$, si nous nous plaçons au-delà du changement de pente, on constate que le rapport

$$\frac{dC_z/di}{dC'_z/di}$$

est sensiblement du même ordre dans les deux cas de la théorie et de l'expérience. Ce qui signifie que dans ce cas la théorie du biplan a, vis-à-vis de l'expérience, la même valeur que la théorie du monoplan.

Si l'on considère la sustentation de chacune des parties de l'aile à fente, l'écart entre la théorie et l'expérience est plus grand que pour les autres comparaisons déjà faites. Mais cet écart est particulièrement sensible pour les petites incidences où ces comparaisons n'ont que peu de valeur.

On constate, par contre, pour des incidences plus notables, un accord très net pour un phénomène assez curieux; à 20° le petit volet dont la largeur vaut seulement 15 % de celle du gros profil, supporte à lui seul 1/3 de la sustentation totale.

Enfin on peut constater, sur les courbes expérimentales que ce dispositif théorique se comporte comme une très bonne aile à fente construite empiriquement, aussi bien du point de vue de l'augmentation de C_z maximum que, surtout du point de vue de l'augmentation de l'incidence où se produit ce maximum (environ 12° par rapport au gros profil essayé seul).

Un autre fait à noter est la similitude à peu près complète des courbes de pressions théoriques et expérimentales pour des incidences différentes mais pour une même valeur partielle de C_z (c'est-à-dire pour une même valeur de la sustentation de l'un des profils, en l'occurrence ici pour le gros profil que seul nous avons pu vérifier).⁽¹⁾ La théorie permet donc de résoudre le problème du calcul des nervures à condition de connaître la valeur expérimentale des C_z .

(1) - En ce qui concerne la répartition des pressions sur le bec avant, les courbes obtenues par le calcul laissent paraître des déformations assez surprenantes. Ceci, toutefois, est confirmé par certaines expériences sur un profil RAF dans lequel une fente avant était pratiquée. (Voir figure 4-7 page 64).

Après la rédaction définitive de ce mémoire, nous avons eu connaissance des essais très développés entrepris par M. Lacaine, pour déterminer les répartitions des pressions sur les différentes parties des dispositifs hypersustentateurs.

Nous reproduisons ci-dessous (*Figure 4-6*) avec la permission de l'auteur une planche montrant une partie des résultats obtenus pour l'aile à fente avant : Il s'agit des courbes de portances partielles et globale d'un profil NACA 23.012 muni d'une fente avant 5-C 11

Les résultats des calculs effectués dans ce chapitre concordent bien, au moins qualitativement avec les résultats expérimentaux de cette planche. En particulier, le phénomène de très grande portance du bec avant pour certaines incidences est vérifié.

La planche 4-7 indique certains résultats déjà anciens d'essais sur un profil N.A.F.

TABLEAU I

Gros Profil							
α	0	2,5	5,0	7,5	10	15	20
y_1	5,16	2,37	1,398	0,822	0,461	0,05	0
y_2	5,18	7,915	8,98	9,71	10,28	11,14	11,71
30	40	50	60	70	80	90	100
0,132	0,569	1,07	1,414	1,578	1,53	1,07	0
12,03	11,52	10,4	8,77	6,69	4,575	2,255	0
Petit Profil							
α'	0	0,3825	0,765	1,1475	1,630	2,304	3,060
y_1	0,280	0,049	0	0,049	0,106	0,197	0,312
y_2	0,280	0,773	1,085	1,316	1,447	1,694	1,967
4,598	6,121	7,658	9,178	10,707	12,237	13,766	15,296
0,592	0,822	1,020	1,184	1,192	1,044	0,625	0
2,138	2,270	2,270	2,105	1,826	1,431	0,871	0

TABLEAU II

$$d = 246 \quad d^2 = 60.517 \quad d^2 - (R_1^2 + R^2) = 31.495,8 \quad c = 58,815 \quad \alpha = 1,23437$$

$$R_2 = 166,2 \quad R_2^2 = 27.623 \quad \text{ch} \mathcal{J} = 2,5334 \quad \text{sh} \alpha = 1,5736 \quad \beta = 0,34688$$

$$R_1 = 37,4 \quad R_1^2 = 1.399 \quad \text{sh} \mathcal{J} = 2,3277 \quad \text{sh} \beta = 0,35388 \quad \omega_1 = 1,58125$$

D'après les formules (24), (25), (26), et (27) (page 10)

$$q = e^{-\frac{\pi^2}{\omega_1}} \quad \text{Log } \pi^2 = 0,99430 \quad \text{Log } \frac{\pi^2}{\omega_1} = 0,79530 \quad \text{Log Log } e^{-\frac{\pi^2}{\omega_1}} = 0,43308 \quad \text{Log } e^{-\frac{\pi^2}{\omega_1}} = \text{Log } q = 3,28930$$

$$\text{Log } \omega_1 = 0,19900 \quad \text{Log Log } e = 1,63778 \quad \text{Log } e^{-\frac{\pi^2}{\omega_1}} = 2,7107 \quad q = 0,001947$$

D'après la formule (4) (page 103)

$$4q^2 = 0,000015 \quad \frac{1}{6} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4q^{2n}}{(1-q^{2n})^2} = 0,16665 \quad \frac{\pi^2}{2\omega_1} = 3,1209 \quad \eta_1 = 0,52008 \quad \frac{-2\eta_1\beta}{\omega_1} = 0,22817$$

D'après la formule de la page 105

$$2a = -0,68916 \quad \cos 2a = 0,77175 \quad \frac{4\pi q^2 \sin 2a}{(1-q^2)\omega_1} = 0,00001915 \quad \frac{\pi^2}{2\omega_1^2} = 1,9736 \quad \frac{\pi^2}{2\omega_1^2} \sin 2a = 1,2551$$

$$\sin 2a = -0,63592 \quad \frac{-\pi \sin 2a}{\omega_1} = +1,2634 \quad \frac{-\eta_1}{\omega_1} = -0,32892 \quad \frac{2\pi^2 q^2 \sin 2a}{\omega_1^2 (1-q^2)} = 0,00001947 \quad \frac{2\pi^2 q^2 \sin 2a}{\omega_1^2 (1-q^2)} = 0,00002309$$

$$\cos 2a = +0,77175$$

CALCUL DES PRESSIONS SUR UN PROFIL A FENTE AVANT TABLEAU DE CALCULS (III, IV, VI)

GROS PROFIL

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	h
θ_1	-130°	-59°5	-93°1	-19°	-11°6	-5°75	+0°383	-5°75	-11°6	+19°	+33°1	+59°5	θ_2
$2b$	-5,2417	-2,0632	-1,1476	-0,45384	-0,40225	-0,19233							$2b$
ch2b	+256,87	+3,2291	+1,7345	+1,2250	+1,0820	+1,0192							cn2b
sh2b	-256,87	-3,8720	-1,4170	-0,70751	-0,41313	-0,20071							sh2b
ch2b-cos2a	-256,20	-3,2273	-0,96253	-0,45325	-0,21025	-0,24818							ch2b-cos2a
(ch2b-cos2a) ²	65587	10,391	0,92648	0,25863	0,09625	0,06159							(ch2b-cos2a) ²
1+ch2bcos2a	-197,27	-2,1582	-0,33344	+0,05460	+0,16496	+0,21227							1+ch2bcos2a
E	-0,00493	-0,32143	-1,3126	-2,7875	-4,0723	-5,0998							E
C	-0,00492	-0,00002	-0,00003	-0,00002	-0,00002	-0,00002							C
1erCrochet	-0,23799	-0,61970	-1,54077	-3,01566	-4,30046	-5,31891							1erCrochet
D	-0,00594	-0,32891	-0,72062	+0,52454	+3,3825	-0,32891							D
E	-0,00593	-0,40886	-0,50604	-0,00003	-0,00002	-0,00002							E
2ème Crochet	-0,34078	-0,73796	-1,04957	+0,19560	+3,05361	+6,4921							2ème Crochet
G	+0,00006	+0,46659	+1,9195	+4,3225	+5,3375	+4,0999							G
H	-0,00490	-0,00007	+0,00003	-0,00001	-0,00001	0							H
3ème Crochet	0	+0,46652	+1,9195	+4,3225	+5,3375	+4,0899							3ème Crochet
z-c m/m	69	132,8	210,2	290,6	348	306,3							z-c m/m
z+c m/m	43,5	94,2	140,7	205,5	246,2	273							z+c m/m
z1	75,6	130,2	215,3	296,5	354,6	393							z1
z1-bz1/z1	76,4	129,3	209,5	292,7	352	392							z1-b ² /z1
z2	182,2	181,7	181,4	176,3	168	158,8							z2
z2-b'2/z1	70,8	186,6	265,4	304,8	275	179,3							z2-b' ² /z1
N	0,0000	0,00978	0,00266	0,00116	0,000851	0,000989							N
0,55130	+0,55130	+0,55130	+0,55130	+0,55130	+0,55130	+0,55130							0,55130
1,53889 x (1er crochet)	+0,36624	+0,95365	+0,3/103	+4,64277	+6,61793	-8,3690							1,53889 x (1er crochet)
coeff. de sin α	-0,1072	1,14031	+2,56535	+2,09387	+3,01302	+1,2415							coeff. de sin α
uKc x coeff. de sin α	+3,2566	-1,2233	-1,72125	-1,06041	-0,60384	-0,26569							uKc x coeff. de sin α
0,03489	+0,03489	+0,03489	+0,03489	+0,03489	+0,03489	+0,03489							0,03489
0,049417 x (1er crochet)	+0,01176	+0,04062	+0,07648	+0,00077	+0,21251	+0,26285							0,049417 x (1er crochet)
coeff. de cos α	+0,0000	+0,52203	+2,03087	+4,35816	+5,63490	+4,39764							coeff. de cos α
uKc x coeff. de cos α	+0,97570	+1,22409	+1,21834	+1,13724	+1,12316	+1,02957							uKc x coeff. de cos α
% de la corde	0,3	10	25,3	43,4	71,2	90							% de la corde

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	N
α	+17° 8	+9° 1	-10°	29° 2	-52°	-79°	-11° 1	-15° 9	+15° 2	+109°	+75° 7	+49°	1
2 b	+0,51723	+0,5175	-0,34576	-1,0125	-1,6031	-6,7594	-3,2773	-5,5100	+5,3124	+3,7970	+2,6250	+1,6952	2 b
ch 2b	+1,1966	+1,0438	+1,0607	+1,5579	+3,1166	+7,7710	+26,694	+123,58	+101,48	+22,295	+6,9986	+2,8262	ch 2b
sin 2b	+0,9892	+0,9892	-0,35375	-1,1246	-2,9518	-7,7065	-26,675	-123,57	+101,41	+22,272	+6,9867	+2,5444	sin 2b
ch 2b cos 2a	+1,9634	+1,136	+1,3525	+2,3297	+3,8884	+8,5425	+27,466	+124,4	+102,24	+23,067	+7,1704	+3,2745	ch 2b cos 2a
(ch 2b + cos 2a) / 2	3,8747	3,064	3,3582	5,4285	15,120	72,980	754,40	134,63	60,961	14,181	5,1022	2,6702	(ch 2b + cos 2a) / 2
1 + ch 2b cos 2a	1,70745	1,51709	1,62711	1,92106	2,8426	5,5944	16,732	70,062	+0,01235	+0,05477	+0,34116	+0,00005	1 + ch 2b cos 2a
5	+0,64184	+0,69567	+0,63945	+0,54226	+0,32752	+0,14746	+0,04600	+0,01016	+0,001235	+0,00043	+0,00013	+0,00005	5
C	+0,00002	+0,00002	+0,00002	+0,00003	+0,00006	+0,00015	+0,00051	+0,00237	+0,00195	+0,00043	+0,00013	+0,00005	C
1er crochet	+0,41372	+0,46775	+0,46123	+0,31415	+0,09634	-0,08010	-0,13163	-0,21561	-0,21384	0,17294	-0,06415	+0,12307	1er crochet
E	+0,97976	+1,03100	-1,06360	+0,80070	+0,44450	+0,18950	+0,05651	+0,00980	+0,01196	+0,06760	+0,21098	+0,44493	E
F	+0,00003	+0,00002	+0,00002	+0,00004	+0,00007	+0,00018	+0,00062	+0,00285	+0,00234	+0,00052	+0,00016	+0,00007	F
2ème crochet	+0,65044	+0,75211	+0,73991	+0,47183	+0,11566	-0,13923	-0,27178	-0,31626	-0,31161	-0,26009	-0,11777	+0,15614	2ème crochet
G	+0,21267	+0,11384	-0,13221	-0,27619	-0,24503	-0,12946	-0,04438	-0,01003	+0,01217	+0,05254	+0,14496	+0,25622	G
H	-0,53004	-0,00001	+0,00001	+0,00002	+0,00006	+0,00015	+0,00051	+0,00235	-0,00193	-0,00042	-0,00013	-0,00005	H
3ème crochet	+0,21266	+0,11383	-0,13220	-0,27617	-0,24497	-0,12931	-0,04387	-0,00768	+0,01024	+0,06208	+0,14486	+0,25623	3ème crochet
$z - c$ m/m	45	47,7	47,8	44,8	40,3	34,8	30	27,2	27,3	30,4	35,3	40,7	$z - c$ m/m
$z + c$ m/m	155,8	164,7	164,6	154,8	138,3	119,3	102	92,2	92,8	101	121,2	140,2	$z + c$ m/m
$\frac{1}{z+c} - \frac{1}{z-c}$	0,0168	0,0147	0,0150	0,0170	0, 11	0,0281	0,0384	0,0458	0,0465	0,0374	0,0276	0,0206	$\frac{1}{z+c} - \frac{1}{z-c}$
z_1	40	41,2	41,3	40,3	38,4	36,3	34,6	33,5	33,4	34,3	36	38,1	z_1
$z_1 - b^2/z_1$	9,8	36,5	61,2	70	60,2	34,8	0	34,6	59,8	69	60	35,2	$z_1 - b^2/z_1$
z_2	4,08	1,096	0,675	0,576	0,638	1,043	∞	0,968	0,558	0,4973	0,600	1,082	z_2
$z_2 - b^2/z_2$	311,8	308	294,3	265,7	239,4	220,8	220	235,5	235,5	235,5	258,1	282,3	$z_2 - b^2/z_2$
K	242,3	236	214,2	173,6	152,7	137,8	138	138	147,2	171	202,2	202,2	K
$0,55130$	1,284	1,306	1,358	1,520	1,568	1,603	∞	1,601	1,600	1,544	1,396	1,396	$0,55130$
$\frac{1,53889 \times}{\text{(1er crochet)}}$	0,0552	0,0221	0,0138	0,0149	0,0212	0,0464	∞	0,0728	0,0411	0,211	0,0231	0,0294	$\frac{1,53889 \times}{\text{(1er crochet)}}$
coeff. de $\frac{1}{\sin \alpha}$	+0,55130	+0,55130	+0,55130	+0,55130	+0,55130	+0,55130	+0,55130	+0,55130	+0,55130	+0,55130	+0,55130	+0,55130	coeff. de $\frac{1}{\sin \alpha}$
$\frac{4 \alpha c \times \text{coeff.}}{\sin \alpha}$	+0,63667	+0,71932	+0,70994	+0,48344	+0,14203	-0,11527	-0,27951	-0,33180	-0,32906	-0,26614	-0,09974	-0,18939	$\frac{4 \alpha c \times \text{coeff.}}{\sin \alpha}$
0,03489	+1,83912	+2,02323	+2,00115	+1,50657	+0,81599	+0,28880	0	-0,09676	-0,08937	+0,02427	+0,33451	+0,89633	0,03489
$\frac{0,04917 \times}{\text{(1er crochet)}}$	+37,400	+10,52	+6,454	+5,285	+4,060	+3,190	∞	-1,6575	+0,6772	+0,1604	+1,019	+6,210	$\frac{0,04917 \times}{\text{(1er crochet)}}$
coeff. de $\frac{1}{\cos \alpha}$	+0,03489	+0,03489	+0,03489	+0,03489	+0,03489	+0,03489	+0,03489	+0,03489	+0,03489	+0,03489	+0,03489	+0,03489	coeff. de $\frac{1}{\cos \alpha}$
$\frac{4 K c \times \text{coeff.}}{\cos \alpha}$	-0,02044	-0,02311	-0,02280	-0,01552	-0,00478	+0,00396	+0,00898	+0,01067	+0,01055	+0,0855	+0,00317	-0,00608	$\frac{4 K c \times \text{coeff.}}{\cos \alpha}$
1er crochet	+0,22731	+0,12561	-0,12011	-0,25680	-0,21488	+0,09046	0	+0,03786	+0,05570	+0,09552	+0,18292	+0,29720	1er crochet
$\frac{4 K c \times \text{coeff.}}{\cos \alpha}$	+4,7166	+0,632	-0,389	-0,902	-1,069	-0,999	∞	+0,6487	+0,5468	+0,6313	+0,9943	+2,054	$\frac{4 K c \times \text{coeff.}}{\cos \alpha}$
% de la corde (Projection)	12,56	12,25	10,20	7,63	3,66	1,27	0	1,05	3,40	6,44	9,25	11,46	% de la corde (Projection)
N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	N

CALCUL DES PRESSIONS SUR UNE AILE A FENTE AVANT

TABLEAU DE CALCULS (V)

$i \sin \alpha$	+0,45270	+0,44873	+0,23926	+0,14745	+0,08385	+0,03693		+0,07419	+0,13039	+0,24443	+0,42809	$i \sin \alpha$
$j \cos \alpha$	+0,9659	+1,21185	+1,20616	+1,17542	+1,11688	+1,01066		0,89146	0,02241	-1,09703	-1,07222	$j \cos \alpha$
v	+1,4282	+1,66052	+1,44543	+1,3257	+1,20073	+1,04759		-0,81727	-0,89202	0,85260	0,64413	v
v^2	2,0409	2,75752	2,0593	+1,7500	1,44175	1,09744		0,66793	0,7957	0,7269	0,41490	v^2
C_p	-1,0409	-1,75752	-1,0293	-0,75000	-0,44175	-0,09744		+0,33207	+0,2043	+0,2731	+0,510	C_p
N	1	2		4	5	6	7	8	9	10	11	N
$i \sin \alpha$	-4,670	+0,646	+0,380	-0,891	-1,055	0,039	0	+0,6422	+0,5413	+0,9843	+2,034	$i \sin \alpha$
$j \cos \alpha$	5,200	1,461	-0,097	-0,730	-0,564	-0,443	0	+0,2304	-0,1219	0,2521	0,862	$j \cos \alpha$
v	-0,530	-0,215	-1,282	-1,626	-1,622	-1,432		+0,6632	+0,5027	+0,7319	+1,172	v
v^2	0,281	0,462	1,644	2,644	2,631	2,031		0,7614	+0,3631	+0,5355	1,3736	v^2
C_p	-0,710	+0,324	-0,648	-1,644	-1,631	-1,051		+0,2386	-0,6360	+0,4645	-0,3736	C_p

$$- \frac{i \Gamma}{4\pi} (-5,76326) + 4 i c V_0 [b, 31771 \sin \alpha + 0,31970 \cos \alpha] + i x = 0$$

$$- \frac{i \Gamma}{4\pi} (-0,18163) + 4 i c V_0 [-0,27178 \sin \alpha + 0,04327 \cos \alpha] + i x = 0$$

$$- \frac{i \Gamma}{2\pi} (-5,58162) = 4 i c V_0 [-3,58949 \sin \alpha + 0,27553 \cos \alpha]$$

$$- \frac{i \Gamma}{2\pi} = + 4 i c V_0 [1,53889 \sin \alpha - 0,049417 \cos \alpha]$$

$$4 i c V_0 [\sin \alpha (8,31771 - 8,86902) + \cos \alpha (-0,31970 + 0,28480)] + i x = 0$$

$$4 i c V_0 \sin \alpha (-0,27178 - 0,27951) + \cos \alpha (-0,04387 + 0,00898) + i x = 0$$

$$i x = 4 i c V_0 [0,55130 \sin \alpha + 0,03489 \cos \alpha]$$

Calcul des pressions sur
une aile à fente avant
résultats théoriques

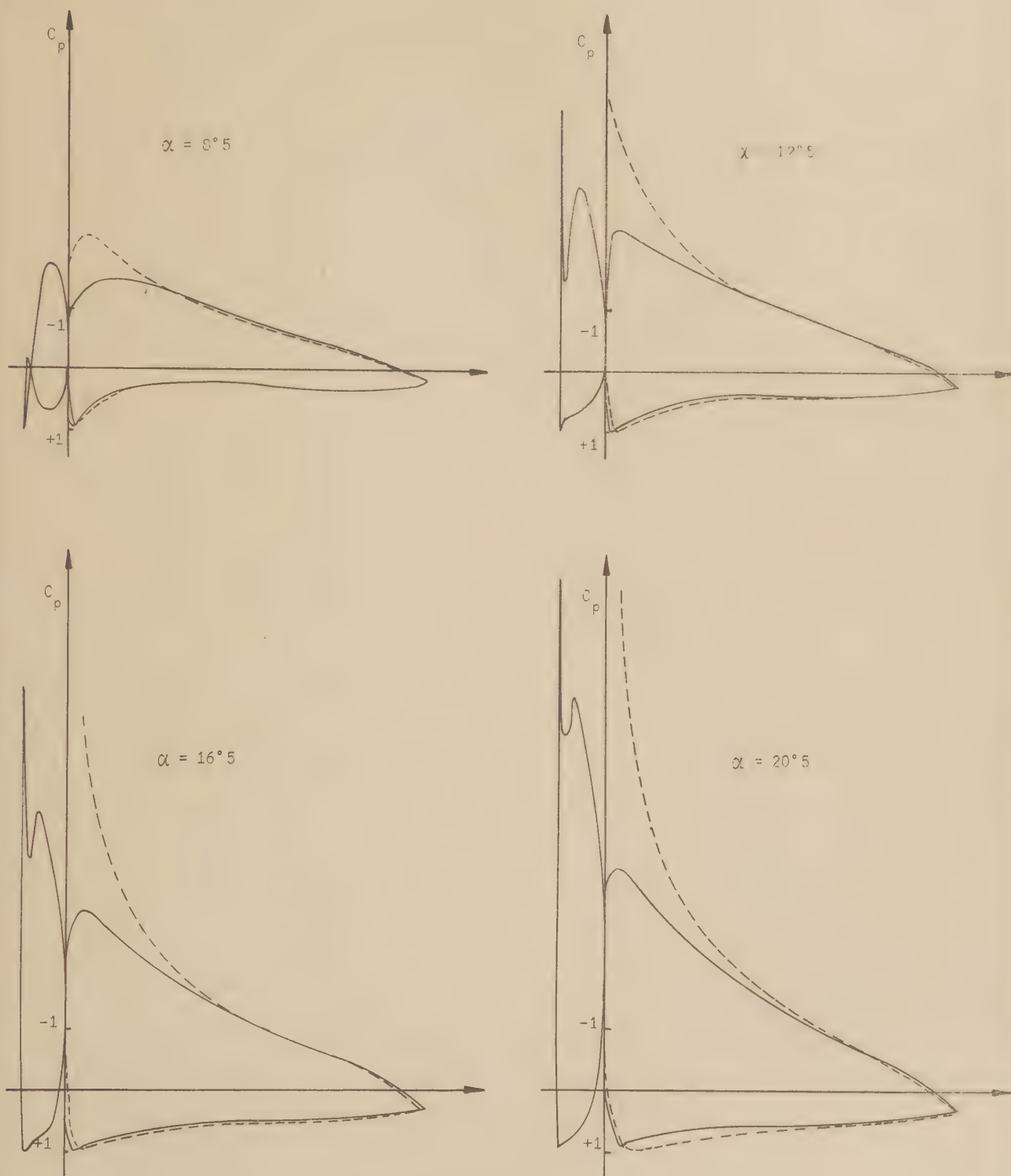
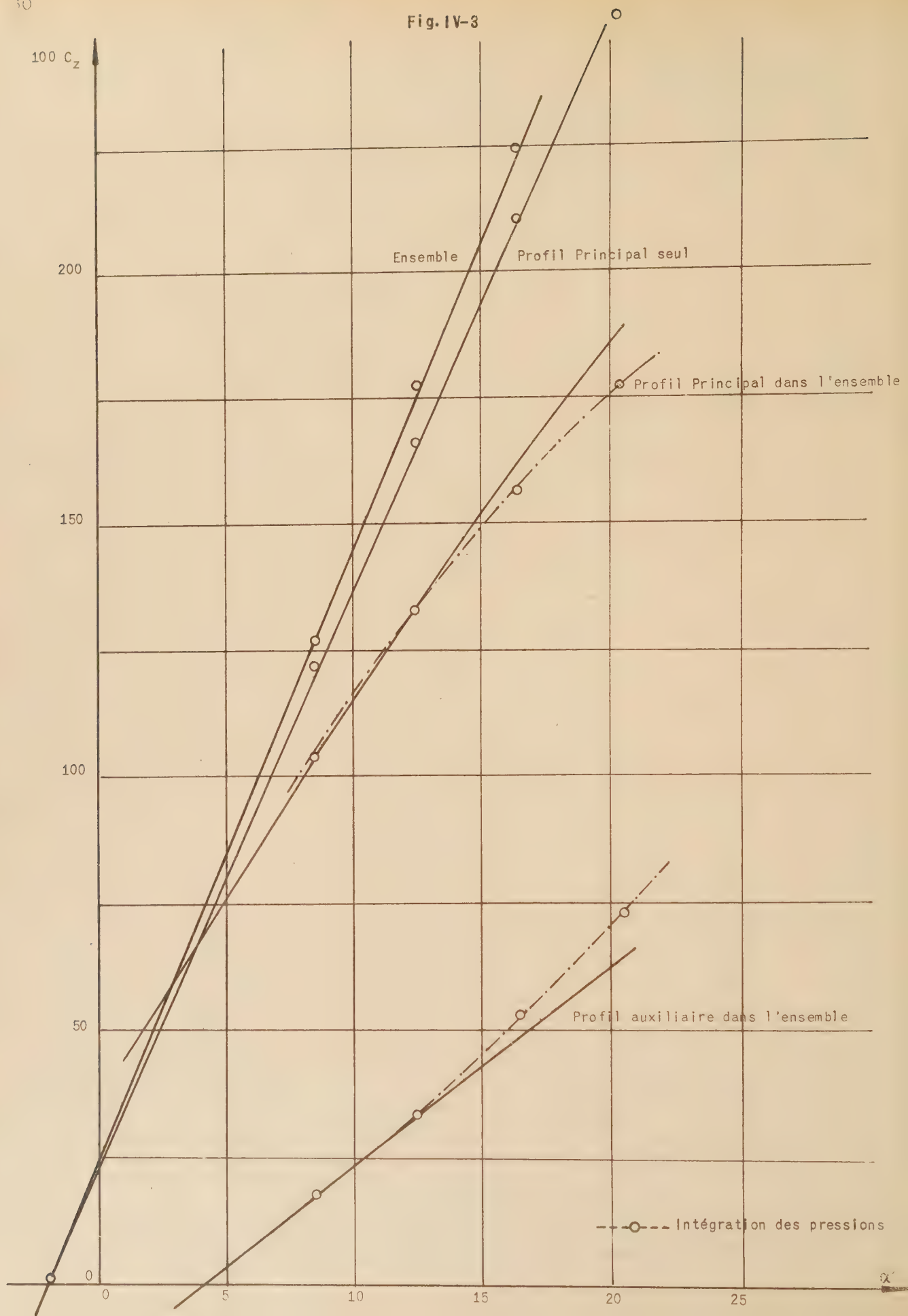


Fig. IV-2

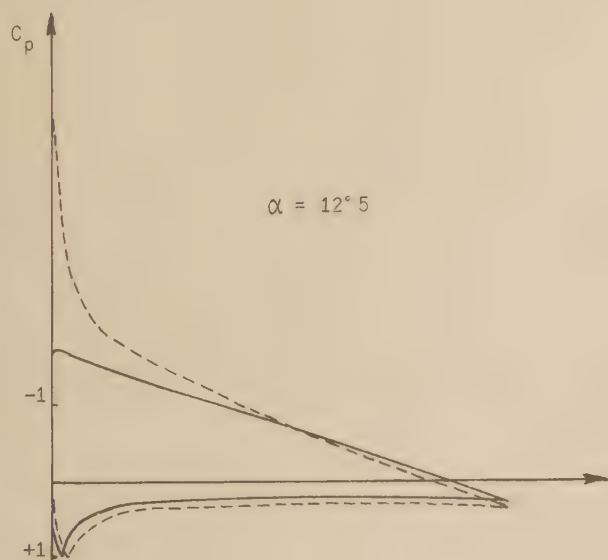
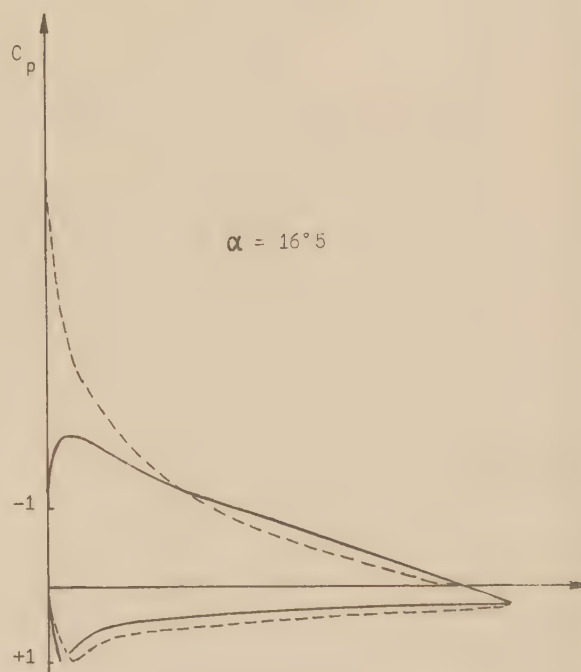
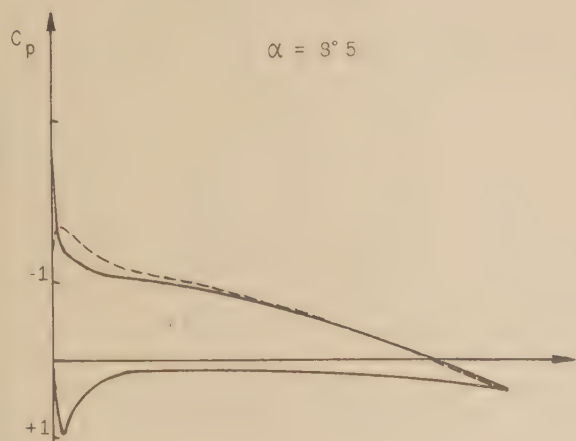
----- Profil Principal seul

Fig. IV-3



Calcul des pressions sur
une aile à fente avant
Résultats expérimentaux

Fig. 4-4



----- Profil principal seul

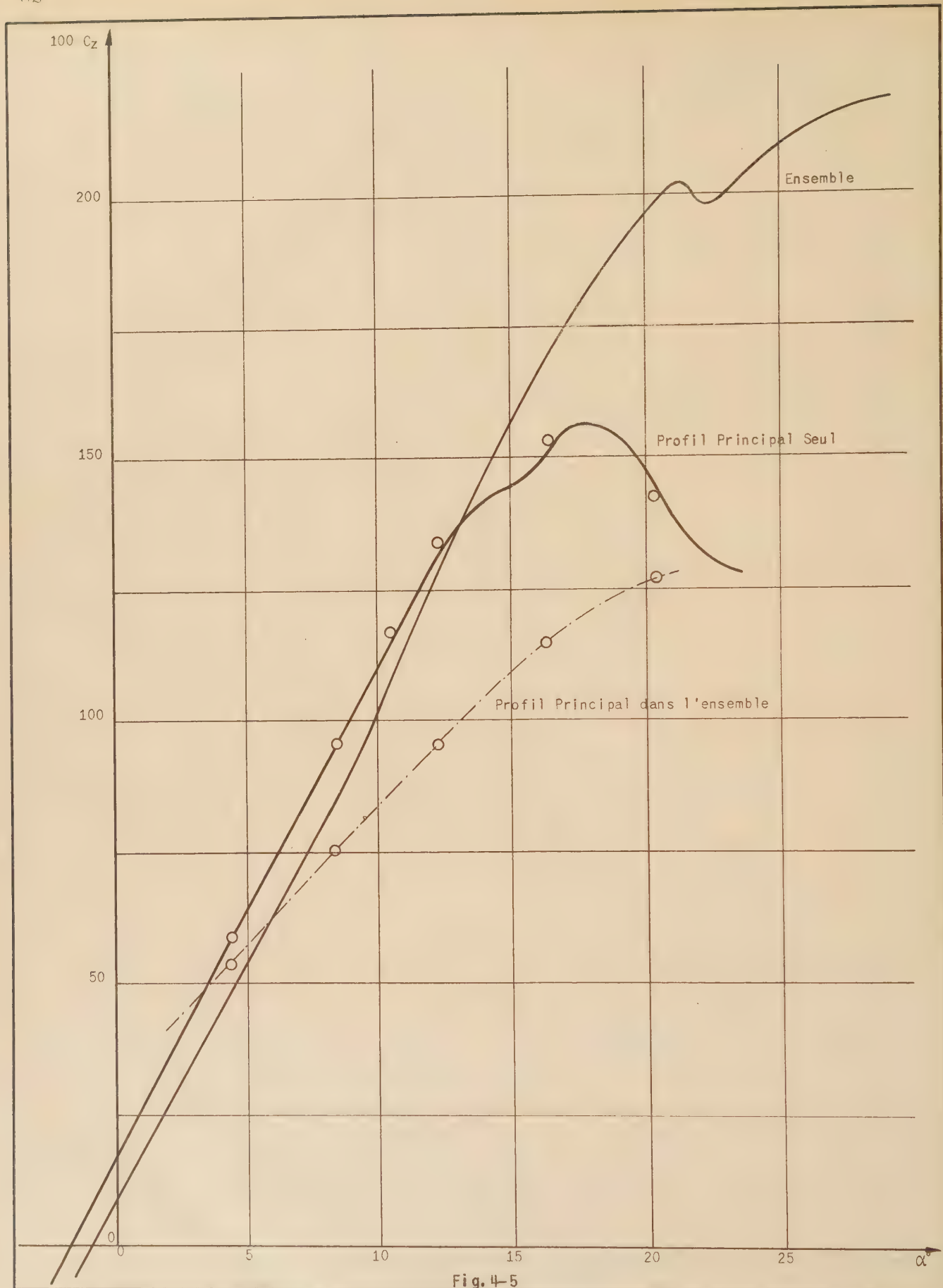


Fig. 4-5

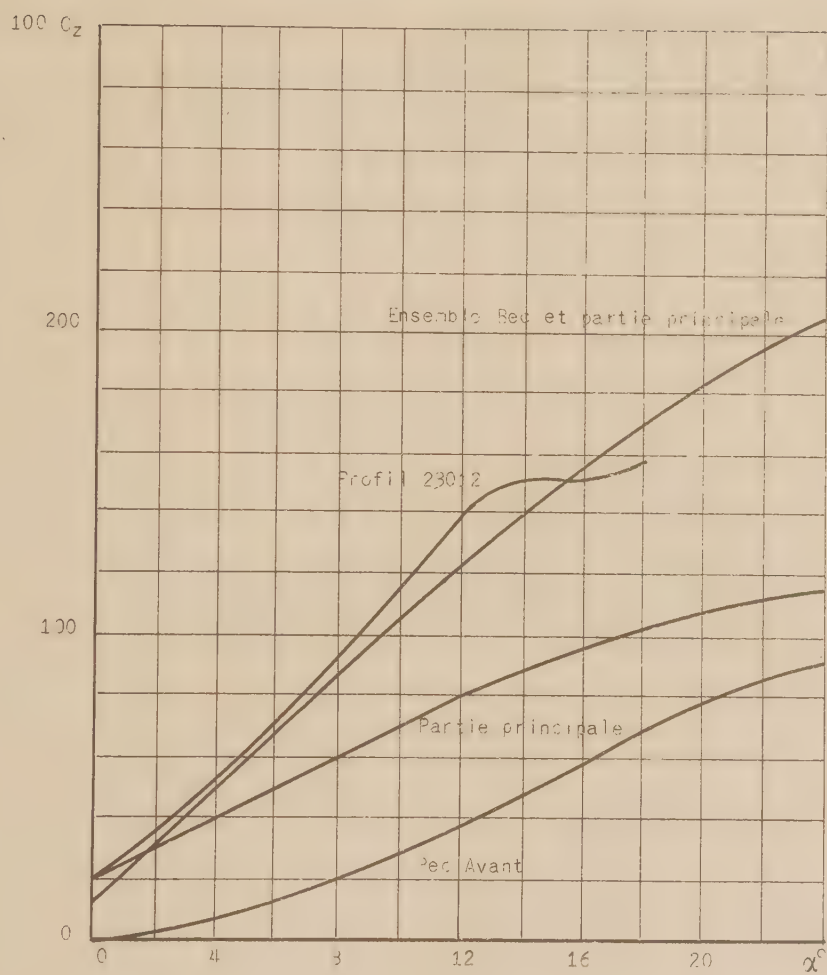
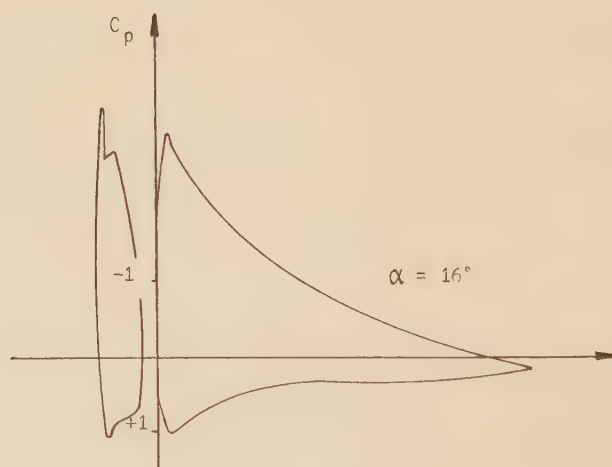
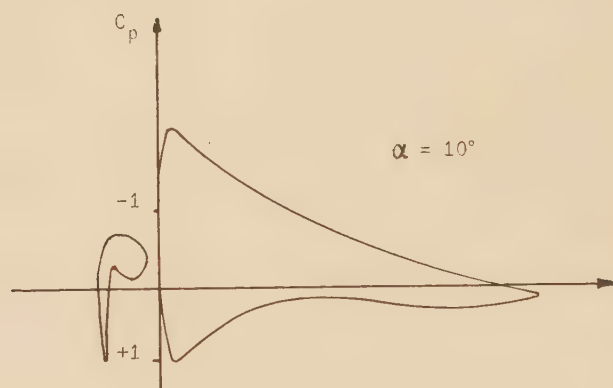
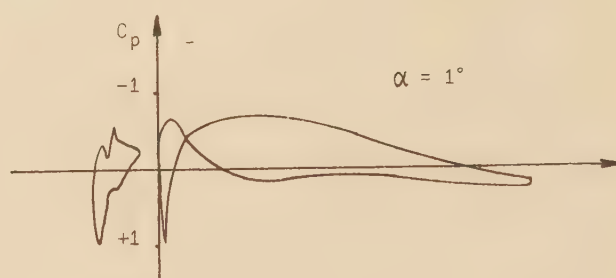


Fig. 4-6

Calcul des pressions sur
une aile à fente avant
Résultats expérimentaux

Fig. 4-7



CHAPITRE V

EXEMPLE NUMERIQUE

LE BIPLAN A AILES EGALES

ETUDE DE L'INTERACTION - SOL

EXEMPLE NUMERIQUE

Chapitre V

LE BIPLAN A AILES EGALES - ETUDE DE L'INTERACTION-SOL

5-1 - GENERALITES.

Par rapport à la théorie que nous exposons le biplan à ailes égales n'est qu'un cas particulier du problème précédent. Il offre cependant sur celui-ci l'avantage de simplifications très importantes de calcul. D'autre part, il est classique et il a été traité de nombreuses fois expérimentalement.

Si ce genre de voilure n'est plus guère employé à l'heure actuelle, il n'en reste pas moins un problème d'actualité à cause de son schéma tout à fait analogue à celui que l'on emploie dans l'étude d'une aile en présence du sol.

Les profils envisagés au cours de ce chapitre sont identiques, sinon rigoureusement, du moins d'une manière approchée suffisante dans la pratique, à des profils monoplans théoriques.

Nous verrons les raisons de ce fait dans la suite. Il nous a permis des confrontations numériques assez nombreuses pour que nous n'ayons point d'autres expériences à faire sur ce sujet.

(Biplan : Girerd - Thèse Paris 1933. Aile en présence du sol : Nénadovitch - Thèse Paris 1936 et Malavard - Thèse Paris 1939).

Nous diviserons ce chapitre en deux parties :

- 1°) Etude du biplan.
- 2°) Etude de l'aile en présence du sol.

5-2 - BIPLAN.

Le biplan d'envergure infinie à ailes égales, dont nous avons calculé les caractéristiques et qui a été essayé complètement, tant au point de vue des C_z globaux et partiels, qu'au point de vue des pressions par M. Girerd a les caractéristiques suivantes, que l'on retrouvera sur la figure V-1.

Profils :	Göttingen Joukowski	431
	épaisseur relative	13,7 %
	courbure relative	4 %
Entreplan	1/2	
Décalage	1	
Interinclinaison	0°	
	Incidence 0° par rapport à la corde de référence du profil	

Rappelons que dans les biplans étudiés par M. Girerd, les profils ne sont pas fixes par rapport l'un à l'autre, mais seulement le point extrême de leur bord d'attaque. L'entreplan et le décalage sont alors, les rapports à la corde des profils, des projections respectivement sur une perpendiculaire et sur une parallèle à la direction du vent, de la distance de ces deux points de bord d'attaque.

5-21 - Etude des transformations.

Nous ne reviendrons sur ces transformations qui sont en théorie les mêmes que celles que nous venons d'étudier au chapitre précédent, que pour signaler certaines simplifications; et tout d'abord, l'une d'elles très importante pour la suite des calculs : l'expérience montre que pour obtenir les deux profils égaux qui nous intéressent ici, il faut avoir dans le plan des cercles deux cercles de même rayon. D'autre part lorsque les deux cercles sont assez éloignés l'un de l'autre, ce qui est le cas ici (*la distance des centres est de l'ordre de quatre fois les rayons*), la première transformation de Joukowski transforme le cercle K_2 en un contour L_2 qui reste, à l'échelle choisie pour l'épure, un cercle.

Les tâtonnements dont nous parlions sont alors particulièrement simples puisque nous sommes déjà assurés que dans la seconde transformation de Joukowski M_2 sera bien, avec des paramètres bien choisis, le profil Joukowski-Göttingen 431 que nous cherchons. On peut faire ces tâtonnements de la manière suivante : après un calcul rapide, on place au mieux les deux cercles K_1 et K_2 et on transforme K_1 en une plaque plane L'_1 - K_2 devient un nouveau cercle L'_2 . On transforme L'_2 en une plaque plane M'_2 , L'_1 devient alors une plaque M'_1 différant relativement peu d'un arc de cercle dont on peut facilement voir la courbure et l'inclinaison par rapport à L'_1 , et l'entreplan et le décalage par rapport à M'_2 . Si le calcul préliminaire est bien conduit, les deux premières quantités sont petites, les deux autres diffèrent peu des résultats cherchés. Il suffit alors de faire les transformations qui conduisent aux profils Joukowski en tenant compte de ces observations de la manière la plus simple pour obtenir un résultat correct.

5-22 - Calculs des vitesses, des pressions, des circulations.

Nous avons indiqué au chapitre précédent la manière de calculer les vitesses dans le plan des profils. Nous n'y reviendrons pas. Nous donnerons donc dès maintenant l'ordre des planches que l'on trouvera dans la suite réservant pour un dernier paragraphe les calculs théoriques, puis numériques de la sustentation et de la résistance induite, qui ont été faits dans ce cas par une nouvelle méthode. On trouvera donc :

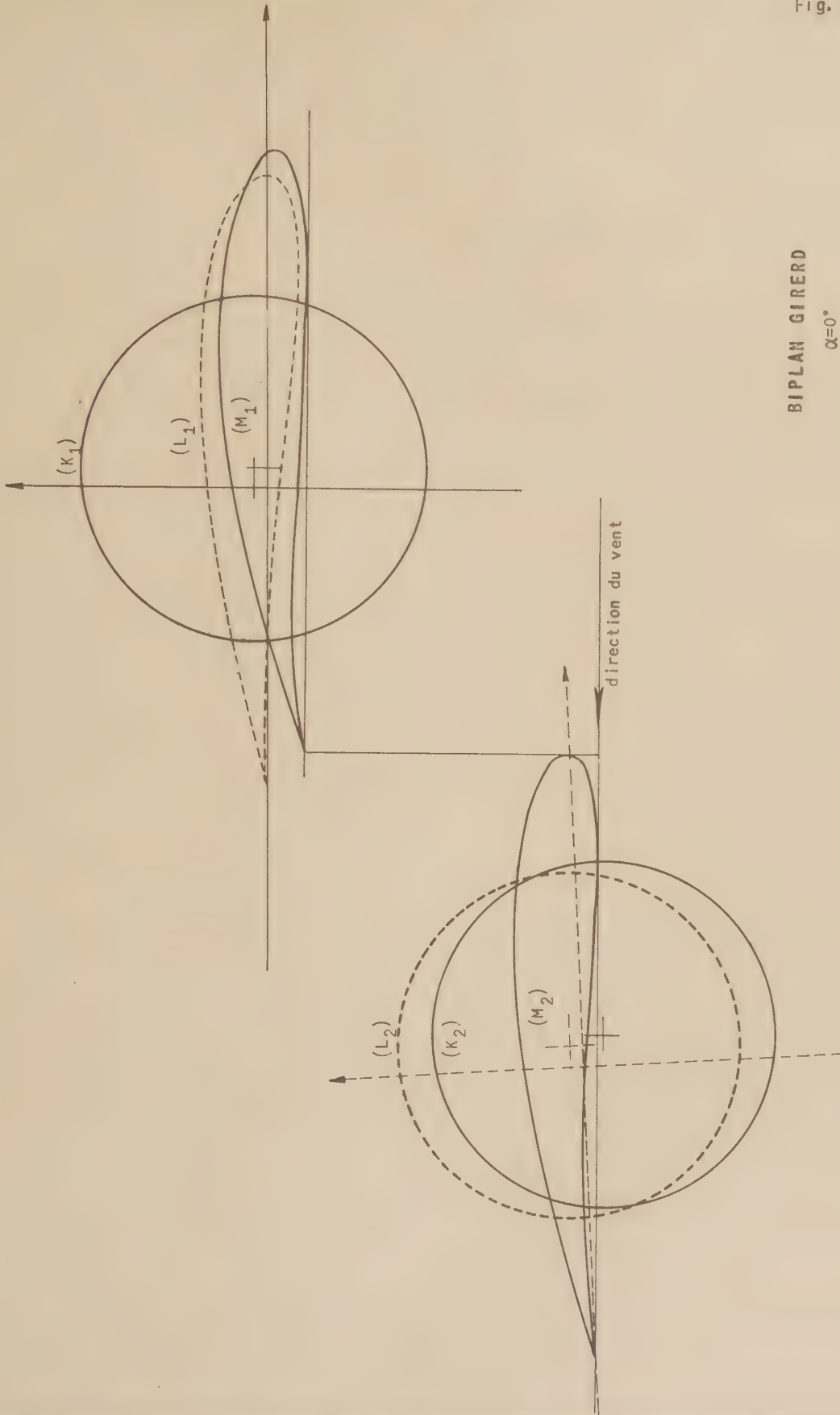
PLANCHE V - I (page 69) - La construction graphique du biplan envisagé à partir des deux cercles.

PLANCHE V - II (page 70) - La comparaison entre les courbes de pressions expérimentales et les courbes théoriques. A titre d'indication nous avons calculé pour le monoplane la courbe des pressions pour la même incidence.

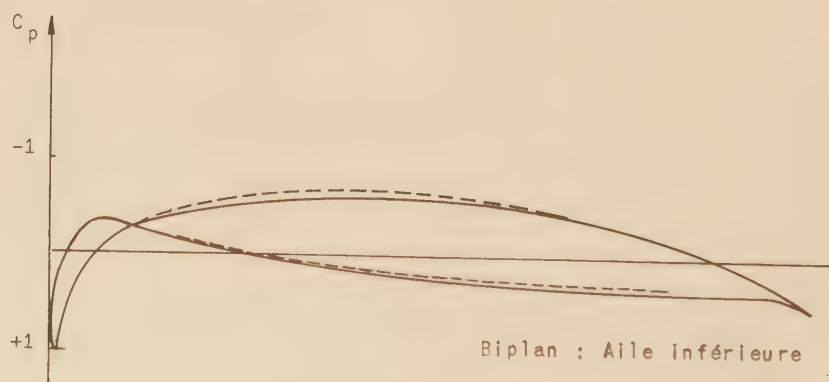
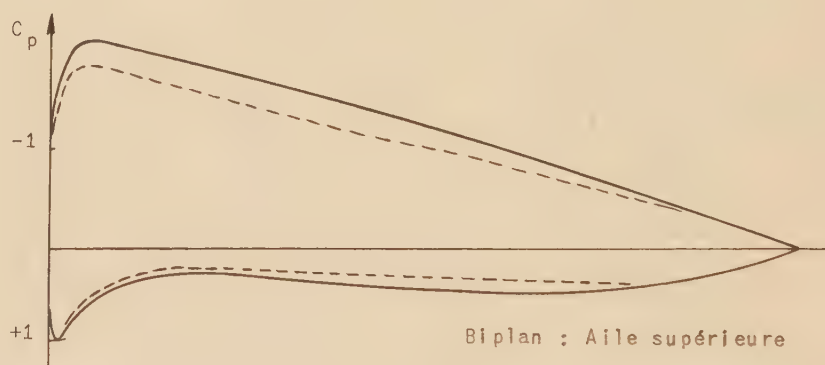
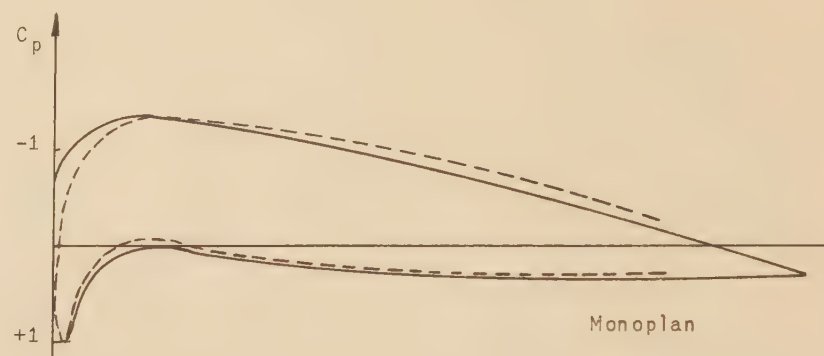
PLANCHE V - III (page 75) - La construction graphique d'un autre biplan envisagé par la suite pour les calculs de trainée d'interaction.

Fig. 5-1

BIPLAN GIRERD

 $\alpha=0^\circ$ 

Calcul des pressions sur
un biplan Girerd $\alpha = 0$



----- Résultats expérimentaux
————— Calculs théoriques

Fig. 5-2

Comme les calculs faits devaient être comparés à des résultats expérimentaux et que ces comparaisons portent sur un diagramme essentiellement déformable (suivant l'incidence, les profils occupent l'un par rapport à l'autre des places différentes); il ne nous est pas possible ici de tracer les courbes $C_z = f(i)$ comme les a tracées Girerd. Cela nous aurait conduit à une construction graphique différente à partir de deux cercles et aux calculs correspondant pour chaque incidence choisie afin d'obtenir quelques points de ces courbes.

5-23 - Calcul de la sustentation théorique et de la résistance induite.

On a vu, au paragraphe 3 du chapitre II les influences mutuelles d'une singularité sur une autre singularité de potentiel dans un écoulement fluide quelconque. Nous allons montrer comment on peut calculer d'après ce principe, et avec une bonne approximation, la sustentation et même la résistance induite de chaque profil dans des cas relativement simples comme celui-ci.

On a vu que, du point de vue mathématique, on pouvait établir un potentiel tel que, l'écoulement à l'infini étant de vitesse rectiligne et uniforme, on ait cependant deux fois une ligne de courant suivant le contour d'un cercle; le potentiel en question est alors une somme de doublets et de tourbillons (chapitre I, deuxième partie, § 1-24).

En tenant compte du fait que les deux cercles sont égaux ($\alpha = \beta$) nous allons montrer numériquement que ce potentiel peut se réduire considérablement et se mettre sous la forme :

$$F(z) = (u-iv)z + \frac{(u+iv)c^2}{\ln^2 \alpha (z - c \coth \alpha)} + \frac{(-u+iv)c^2}{\ln^2 \alpha (z - c \coth \alpha \alpha)} + \dots$$

En effet, on a, avec les données :

$$d = 217,9 \text{ mm};$$

$$R = 55,7 \text{ mm};$$

$$c = 66,6 \text{ mm};$$

n	$n \%$	$\coth n \%$	$c \coth n \%$	$\frac{sh n \alpha}{sh \alpha}$	$\frac{sh^2 n \alpha}{sh^2 \alpha}$	$\frac{sh^2 \alpha}{sh^2 n \alpha}$
1	1,29114	1,1636	102,9 mm	1,621	1	1
2	2,58228	1,0115	58,7 mm	6,576	39	0,0650
3	3,87342	1,0022	55,7 mm	24,64	16,3	0,0049
4	5,16456	1,0001	55,6 mm	87,5	52,5	0,0004
5	6,45570	1,0000	"			
6	7,74684	1,0000	"			
7	9,03798	1,0000	"			

On voit que de cette façon tous les tourbillons à partir du troisième inclus sont confondus sur les points limites Q_1 et Q_2 . Quant aux doublets on peut effectivement les négliger à partir du troisième inclus puisque celui ci n'est même pas les cinq millièmes du premier.

L'écriture de la formule précédente est donc pleinement justifiée du moins numériquement et il ne nous reste plus dans chaque cercle que deux doublets et trois tourbillons, ce qui est un nombre de singularité relativement maniable. Nous allons voir maintenant ce que deviennent ces singularités dans la suite des deux transformations de Joukowski et lorsque nous arrivons au plan des profils.

Dans la première transformation, les singularités qui se trouvent à l'extérieur du cercle K_1 varient suivant les règles usuelles de la Mécanique des Fluides c'est-à-dire :

Les tourbillons conservent leur circulation et restent en des points correspondants, dans les deux plans.

Les doublets restent aussi en des points correspondants, mais leur intensité varie : lorsque l'on passe du plan z au plan Z transformé du premier par la fonction $Z(z)$ l'intensité e d'un doublet placé en un point z_0 devient, au point correspondant Z_0 du plan Z : $e \left(\frac{dZ}{dz} \right)_{z=z_0}$.

Nous n'insisterons pas plus sur ces résultats bien connus et qui se démontrent facilement.

En ce qui concerne les singularités intérieures au cercle K_1 , il n'en va pas tout à fait de même : le genre de transformation conforme que nous employons ne donne qu'une partie du champ résultant, celle qui correspond dans le plan de K_1 au champ extérieur au cercle ayant pour centre le centre de transformation et comme rayon le module (pour une transformation de Joukowski). Nous ne savons donc pas ce que deviennent les singularités intérieures à K_1 , et toutes, du reste, intérieures au cercle qui vient d'être dit. On peut cependant agir de la manière suivante :

La transformation étant de la forme

$$\xi = z + \frac{g^2}{z}$$

on peut écrire, pour les points du plan z

$$z = \xi - \frac{g^2}{\xi} = \xi - \frac{g^2}{\xi^3} - \frac{g^4}{\xi^5} - \frac{2g^6}{\xi^7} - \dots$$

et par suite

$$\frac{1}{z - z_0} = \frac{1}{\xi} + \frac{z_0}{\xi^2} + \frac{g^2 + z_0^2}{\xi^3} + \frac{z_0^3 + 2g^2 z_0}{\xi^4} + \frac{z_0^4 + 2g^2 z_0^2 + 3g^4}{\xi^5} + \dots$$

$$\log(z - z_0) = \log \xi - \frac{z_0}{\xi} - \frac{g^2 + 1/2 z_0^2}{\xi^2} - \frac{g^2 z_0 + 1/3 z_0^3}{\xi^3} - \frac{3/2 g^4 + g^2 z_0^2 + 1/4 z_0^4}{\xi^4} \dots$$

Ces calculs n'offrent aucune difficulté ; ils peuvent être faits sous des conditions assez larges remplies ici. Ils montrent la variation, dans le passage d'un plan z à un plan ξ par une transformation de Joukowski, des singularités intérieures au cercle de transformation dans le plan z . Il est à noter que toutes les singularités résultantes du plan ξ viennent en un même point, centre de la transformation ; un tourbillon du plan z devient dans le plan ξ un tourbillon de même circulation, plus un doublet d'intensité facilement calculable, plus un nombre infini de singularités "d'ordre inférieur". Le même, un doublet devient

...

un doublet de même intensité plus aussi un nombre infini de singularités "d'ordre inférieur". D'autre part il faut noter que le potentiel de l'écoulement rectiligne donne aussi, en plus du potentiel d'un écoulement rectiligne de même direction que le précédent, une suite infinie de singularités, dont un doublet.

Nous avons déjà fait une approximation dans ces calculs en ne prenant qu'un nombre restreint de singularités. Nous en ferons, à partir de ce point une autre qui se justifie aussi bien : nous admettrons que l'influence des singularités que nous avons dites "d'ordre inférieur" sur une autre singularité quelconque est négligeable devant l'action d'un tourbillon sur un autre tourbillon ou un doublet, ou même devant l'inter-action de deux doublets.

Cela résulte de ce que nous avons vu au chapitre III. Nous ne tiendrons donc compte dans le plan ξ que des doublets et des tourbillons.

Dans la seconde transformation, qui fait passer au plan des deux profils, le même phénomène se reproduit : les singularités extérieures au contour (*pseudo-cercle*) L_2 , c'est-à-dire les singularités concentrées au centre de la transformation précédente vont se transformer suivant les règles usuelles de la Mécanique des Fluides. Quant aux singularités intérieures L_2 , elles seront remplacées dans le plan ξ par une suite infinie de singularités toutes au centre de la nouvelle transformation et comprenant des doublets et des tourbillons.

D'après ce que nous venons de dire et d'admettre, nous arrivons au schéma suivant : l'écoulement autour des deux profils peut être remplacé, du point de vue théorique par un écoulement formé par une série de doublets et de tourbillons, placés en deux points bien déterminés et par un écoulement de vitesse rectiligne et uniforme, c'est-à-dire, plus précisément encore :

1°) d'un écoulement de vitesse rectiligne et uniforme

2°) d'un tourbillon et d'un doublet placés au point correspondant, dans la deuxième transformation au centre de la première transformation.

3°) d'un tourbillon et d'un doublet placés au centre de la seconde transformation.

Nous avons appliqué ce raisonnement à un calcul numérique, relatif à l'exemple que nous avons déjà employé pour le calcul des pressions théoriques (*biplan Girerd* $I = 0$; $E = 1/2$, $D = 1$, $\alpha = 0^\circ$). Nous n'indiquerons pas les calculs qui sont longs, mais seulement les résultats assez curieux et les résultats expérimentaux correspondants: pour ce biplan, Girerd a trouvé :

Pour l'aile supérieure :

$$100 C_{z_s} = 136 \quad 100 C_{x_s} = - 2,45$$

Pour l'aile inférieure :

$$100 C_{z_{inf}} = 42 \quad 100 C_{x_{inf}} = + 5,95$$

De plus, pour le profil Gottingen 430 essayé en monoplan, la résistance à l'incidence considéré est d'environ :

$$100 C_{x_m} = 1,7$$

ce qui semble indiquer une résistance d'inter-action des deux profils, de l'ordre de

$$100 C_x = 4,20$$

(en effet pour l'aile supérieure on aurait, d'après ces chiffres :

$$100 C_{x_{s, \text{inter-action}}} = - 2,45 - 1,7 = -4,15$$

et pour l'aile inférieure :

$$100 C_{x_{\text{inf}, \text{inter-action}}} = 5,95 - 1,7 = + 4,25$$

Enfin, la portance moyenne du biplan est donc :

$$100 C_{z_b} = \frac{136+42}{2} = 89$$

Par le calcul que nous avons fait, nous trouvons les résultats suivants : en tenant compte, tout d'abord, des tourbillons seulement, on a, à l'incidence considéré :

Pour l'aile supérieure :

$$100 C_{z_{s.t}} = 152,12$$

Pour l'aile inférieure :

$$100 C_{z_{\text{inf}.t}} = 54,08$$

ce qui donne pour le biplan :

$$100 C_{z_b} = 103,10$$

et par suite un rapport des sustentations théoriques et expérimentales de :

$$K_b = \frac{103,10}{89} = 1,158$$

En tenant compte des inter-actions de toutes les singularités que nous avons retenues, il vient des $\Delta 100 C_z$ opposés pour les deux ailes, et qui se montent à :

Pour l'aile supérieure :

$$\Delta 100 C_{z_s} = + 6,08$$

Pour l'aile inférieure :

$$\Delta 100 C_{z_{\text{inf.}}} = - 6,08$$

ce qui donne, au total, pour les sustentations globales pour l'aile supérieure

$$100 C_{z_s} = 158,2$$

Pour l'aile inférieure :

$$100 C_{z_s} = 48$$

Aussi le rapport des sustentations théoriques et expérimentales est de 1,16 pour l'aile supérieure et de 1,14 pour l'aile inférieure.

En ce qui concerne la résistance d'inter-action calculée elle est de :

$$100 C_{x_{\text{inter-action}}} = + 3,99$$

sui'vant qu'il s'agit de l'aile supérieure ou de l'aile inférieure; il n'y a donc qu'une différence d'environ 5 % entre la résistance d'inter-action expérimentale et théorique.

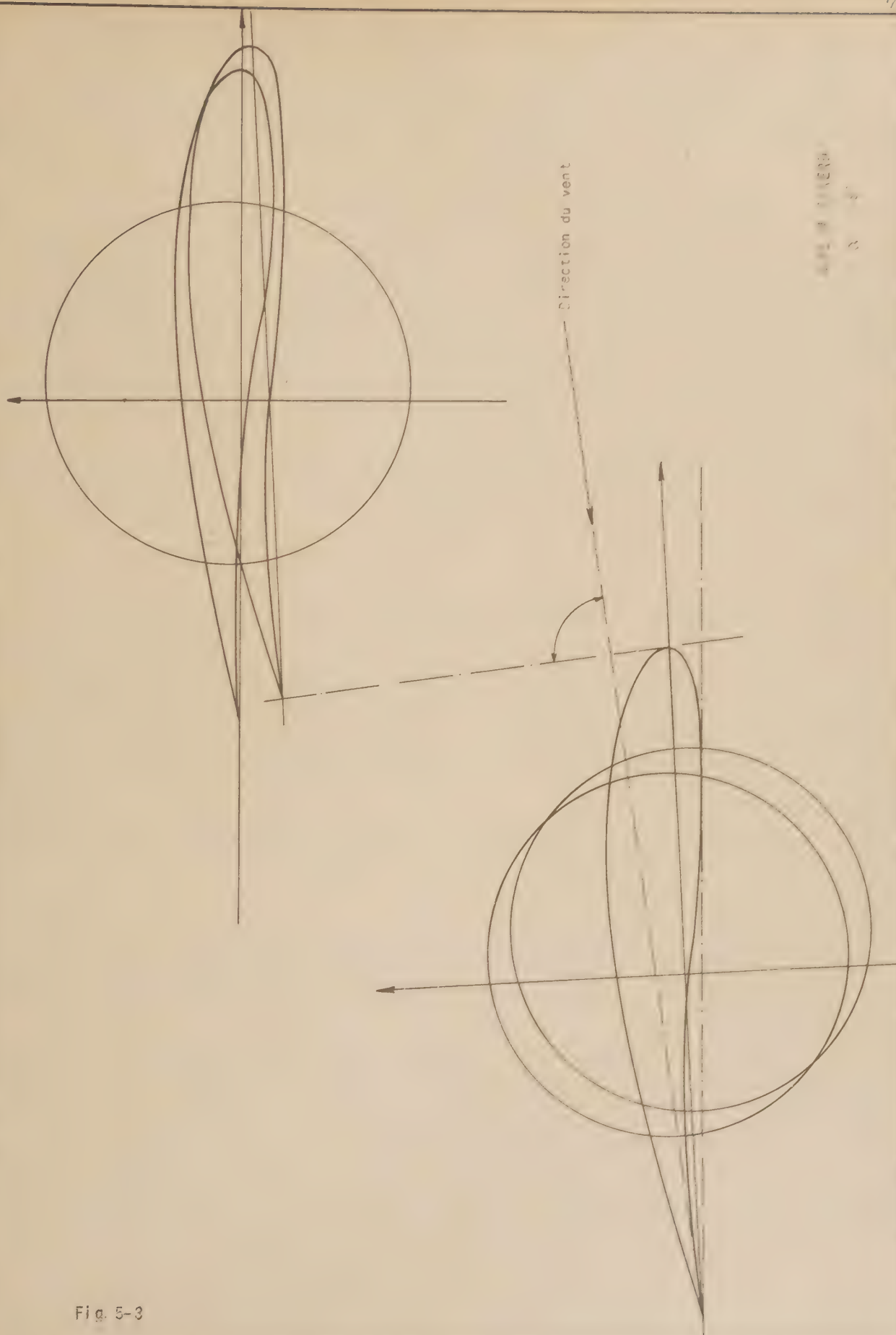


Fig. 5-3

5-3 - ETUDE DE L'INTER-ACTION SOL.

Nous passerons rapidement sur cette étude. Nous ne l'avons donnée ici que comme exemple numérique, au sujet des possibilités de la méthode.

5-31 - Position du problème.

L'écoulement d'un fluide autour d'un profil mis en présence du sol suppose rectiligne et infini peut s'étudier de la même manière que l'écoulement autour d'un biplan sans décalage et symétrique par rapport à un axe parallèle à la direction de la vitesse à l'infini. En effet, une des lignes de courant de ce dernier écoulement (les passant entre les deux profils), est alors une droite indéfinie et parallèle à la direction de la vitesse. (Voir figure 5-4 page 78).

Si l'on considère alors l'une des parties du plan limitées par cette ligne de courant, nous y retrouvons la configuration de l'écoulement autour d'un profil en présence du sol. C'est la théorie du profil image.

Bien entendu le biplan est à la portance nulle, mais les deux profils qui le constituent ont des circulations opposées, accessibles d'après la théorie.

Nous allons voir que les calculs sont extrêmement simplifiés.

5-32 - Transformation conforme et potentiel de l'écoulement.

Nous avons repris un exemple déjà traité par M. Malavard. Le profil étudié est un Joukowski symétrique de 14 % d'épaisseur. La distance au sol, mesurée à partir du centre du profil est égale à la moitié de la corde, ce qui nous donne à tracer des profils sans décalage, d'entreplan 1, et d'interinclinaison variable suivant l'incidence du profil par rapport au sol. Nous avons étudié quatre cas (l'incidence variant de 5° en 5°, de 0 à 15°) qui nous ont conduits aux constatations suivantes :

1°) - comme dans les cas précédents de biplan deux transformations de Joukowski suffisent pour transformer deux cercles en ces deux profils, et

2°) les deux cercles sont égaux,

3°) - les points des deux cercles correspondants à la pointe arrière des deux profils sont symétriques par rapport à la ligne de courant rectiligne qui existe aussi, bien entendu, dans ce plan. Elle est d'autre part perpendiculaire à la ligne des centres

Comme la circulation totale autour des deux cercles est nulle et comme l'inclinaison de l'ensemble des deux cercles est $\pi/2$ les formules (35) et (36) pour le calcul des vitesses deviennent.

$$W = i x - 4 i c V_0 \left(-\frac{\eta_1}{\omega_1} + \frac{2 \pi^2}{4 \omega_1^2} \frac{1}{ch^2 2b} \right)$$

ce qui donne pour les points de vitesse nulle, que nous affecterons de l'indice 0

$$ix = 4 i c V_0 \left(-\frac{\eta_1}{\omega_1} + \frac{2 \pi^2}{4 \omega_1^2} \frac{1}{ch^2 2b_0} \right)$$

D'autre part la formule (34) s'écrit ici

$$\Gamma_1 = -i \left[-8c V_0 \eta_3 + 2i\pi \right] \text{ avec } \eta_3 = \frac{i\pi}{\omega_1} (\eta_1 - 1/2)$$

$$\Gamma_1 = -i \left[-8i\pi (\eta_1 - 1/2) c V_0 - \frac{8i\pi c V_0}{\omega_1} \left(-\eta_1 + \frac{\pi^2}{2\omega_1} \frac{1}{ch^2 2b} \right) \right]$$

$$\Gamma_1 = \frac{4\pi c V_0}{\omega_1} \left[1 + \frac{\pi^2}{\omega_1^2} \frac{1}{ch^2 2b} \right]$$

Ce qui donne très simplement le calcul de la circulation pour l'un des profils. Nous n'avons pas fait ici le calcul des interactions comme au § 5-23 du présent chapitre. Nous avons seulement appliqué la règle de Joukowsky ($P = \rho V_0 \Gamma$) comme si chacun des profils était seul dans un écoulement non perturbé, pour pouvoir comparer nos calculs avec ceux de M. Malavard qui, lui même avait employé cette méthode afin de confronter ses calculs avec les résultats expérimentaux de M. Nénadovitch, résultats concernant incidemment ce genre de biplans droits

Du reste l'expérience montre que l'on peut ici appliquer cette règle, du moins pour les incidences (du profil par rapport au sol) modérées auxquelles nous nous sommes tenus, parce que les interactions sont très faibles

5-33 - Résultats.

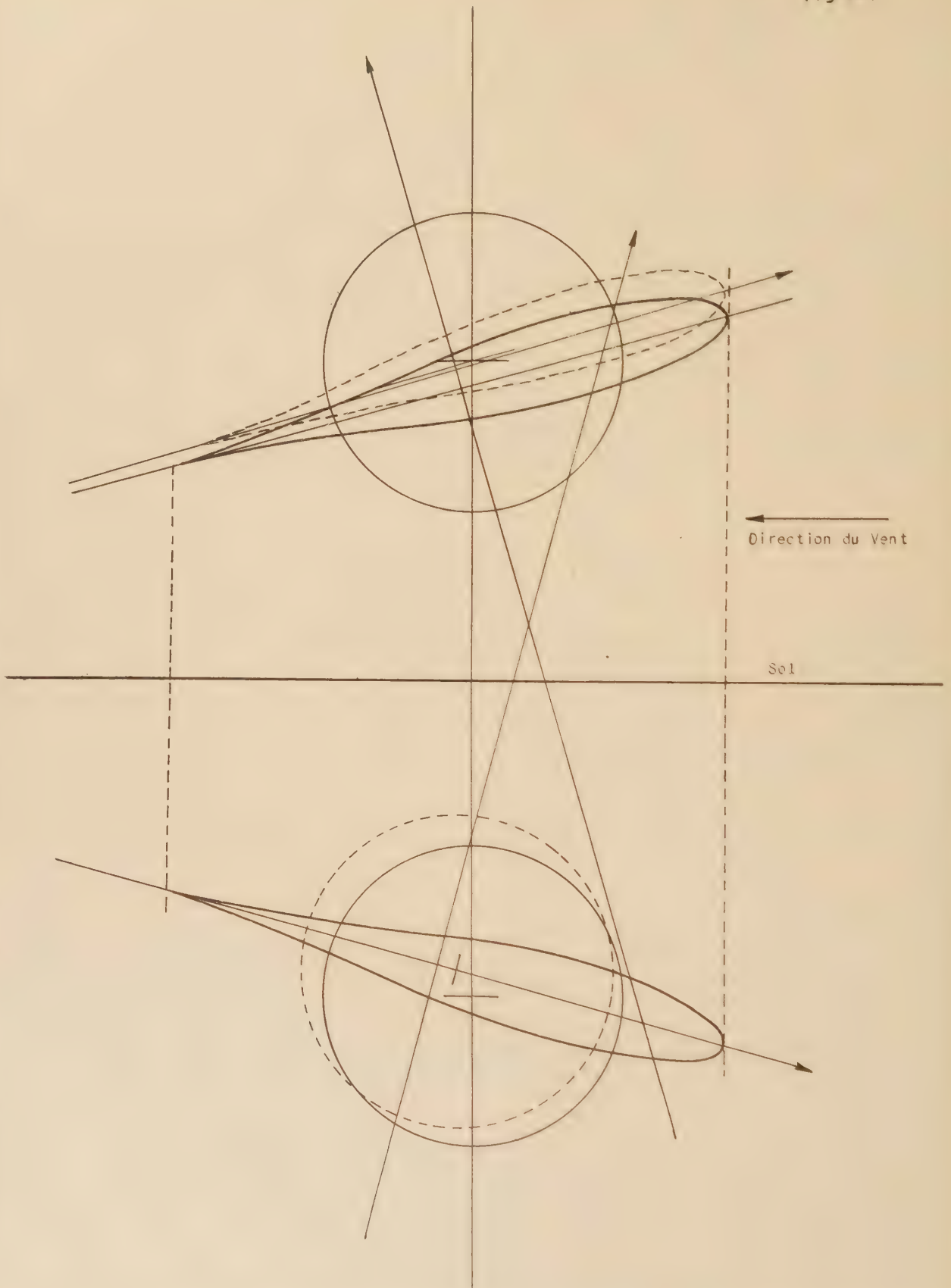
Nous avons trouvé que dans les quatre cas étudiés le rayon des cercles de la distance au centre restaient les mêmes. On trouvera :

TABLEAU V-II (ci-dessous) - Les calculs très simples de la circulation et de la sustentation pour le profil en présence du sol, tiré des formules précédentes ainsi que la comparaison avec les résultats de M. Malavard

PLANCHE V-IV -(page 78) - Un exemple de tracé d'un des quatre cas étudiés

INCIDENCES	0°	5°	10°	15°
θ_3 pour le point de vitesse nulle	62° 6	67° 7	72° 7	78° 2
$2b = \frac{\pi \theta_3}{\omega_1}$	0,9683	1,3516	1,4514	1,6672
ch 2b	1,8330	2,0612	2,2517	2,5009
ch ² 2b	3,5645	4,2487	5,0701	6,2506
$1 - \pi^2 / (\omega_1^2 ch^2 2b)$	- 0,00814	0,15422	0,29123	0,42546
Γ_1	- 3,62	68,6	129,3	183,2
100 Cz calculés	- 3,62	68,6	129,3	183,2
100 Cz Malavard	3	67	131	182
avec : $d = 221$ $\rho = 52,6$ $c = 37,176$				
$ch 2a = ch \omega_1 = (d^2 / 2r_1^2)$ $1 = 7,8262$				

Fig. 5-4



5-4 - CONCLUSION GENERALE DU CHAPITRE.

Avant de passer aux comparaisons avec l'expérience, il faut noter ici la simplicité relative de cette méthode, simplicité due à l'existence des simplifications que nous venons de montrer.

En ce qui concerne le fait que nous admettons comme étant suffisantes, deux transformations de Joukowsky, il semble que ce soit une très bonne approximation pour les besoins de la pratique, si la rigueur mathématique n'est pas observée complètement. Nous avons pu, même, tracer un biplan Girerd ($D = +1$ et $I = 0$), de d'entreplan $1/3$ (*c'est-à-dire que les cercles étaient plus rapprochés dans le plan de l'écoulement primitif*) sans que nous ayons eu à relever des anomalies chiffrables en un point quelconque des contours des profils. Il faut atteindre des cas vraiment "limites" pour que des difficultés surgissent ; nous avons eu à étudier, pour l'interaction-sol des biplans droits d'entreplan $1/2$.

A ce moment les deux profils obtenus n'étaient pas parfaitement semblables lors de la transformation des deux cercles, mais on aurait pu encore appliquer la méthode avec une bonne approximation en observant le fait du point de vue physique : en effet le second profil qui n'avait pas exactement les cotes désirées avait simplement un effet d'image sur le premier et la configuration des lignes de courant de l'écoulement autour de celui-ci ne pouvait donc être beaucoup changée. Le tracé de tels biplans est donc assez rapide.

En ce qui concerne les calculs, si l'on excepte ceux qui sont relatifs à la résistance d'interaction et que nous n'avons pas fait figurer ici, il n'apparaît aucune difficulté sérieuse. Au reste on pourrait, pour les résistances d'interaction, intégrer graphiquement les pressions en projetant sur un axe perpendiculaire à la direction de la vitesse, mais il semble toutefois que cela pourrait introduire des erreurs assez considérables.

Au contraire, la comparaison des calculs ainsi faits dans chaque cas avec les expériences entreprises par M. Girerd montre une concordance assez satisfaisante :

- Pour les pressions, la planche (5-2) montre que l'accord entre la théorie et l'expérience est aussi bon pour chacun des deux profils du biplan que pour le profil du monoplane étudié par la théorie de Joukowsky.

- Pour la sustentation totale de chacun des profils du biplan, l'intégration graphique des pressions théoriques (*que nous n'avons pas fait figurer*) suivant un axe parallèle à la vitesse est en bon accord avec le calcul direct fait au paragraphe 4 du présent chapitre. L'écart entre ces sustentations théoriques et les portances expérimentales semble un peu grand; mais, cela est compensé, si l'on peut dire, par le fait que le rapport entre ces deux sustentations (*théoriques et expérimentales*) est le même pour chacun des deux profils du biplan, pour le biplan pris dans son ensemble et pour le profil essayé en monoplane.

Enfin la concordance entre les résistances d'interaction calculée et expérimentale est assez remarquable puisque l'écart n'est que de 5 %.

CHAPITRE VI

EXEMPLE NUMERIQUE

AILE MUNIE D'UN VOLET ARRIERE A FENTE

EXEMPLE NUMERIQUE

Chapitre VI

AILE MUNIE D'UN VOLET ARRIERE, A FENTE

Nous avons expliqué, au Chapitre III les raisons qui nous ont conduit à rechercher des solutions aux problèmes qui nous intéressent sur des profils empiriques plutôt que sur des profils théoriques assez difficiles à obtenir dans ce cas.

D'autre part, comme nous avions en vue, une confrontation de la théorie et de l'expérience, et comme les circonstances ne nous permettaient pas de faire, à l'Institut Aérotechnique de St. Cyr les essais nécessaires en soufflerie, nos calculs numériques se rapportent à un profil classé dans un Rapport américain (N°664). Il s'agit, en l'occurrence d'un profil N.A.C.A. 23012, équipé d'une fente de forme N° 2i et d'un volet arrière dont la longueur vaut 26 centièmes de la corde totale.

Nous suivrons le même plan d'étude que dans les chapitres précédents et nous allons voir maintenant la suite des transformations qui font passer de ces deux contours au rectangle doublement périodique de Lagally.

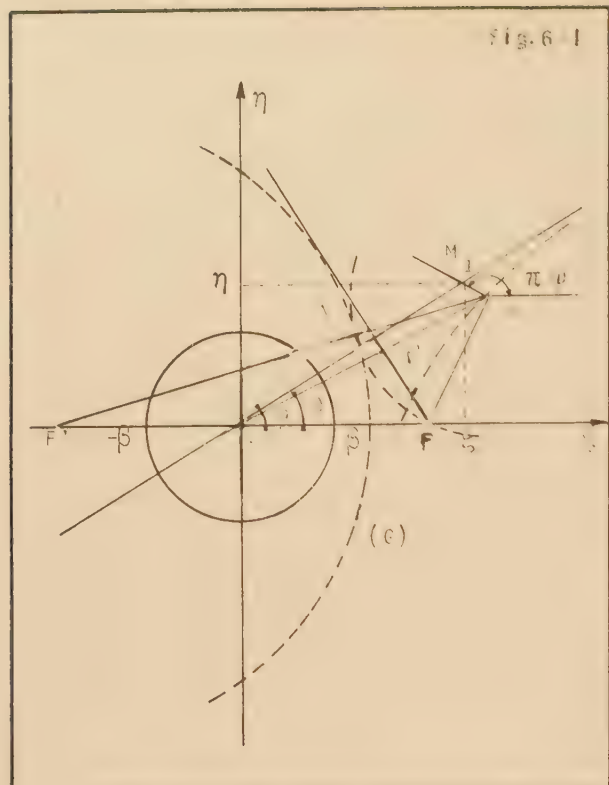
6-1 - TRANSFORMATIONS DES DEUX PROFILS.

Nous avons dit, au Chapitre III que les deux premières transformations à employer ici seraient des transformations inverses de celle de Joukovsky. Nous allons rappeler deux méthodes qui permettent la construction graphique de ce genre de transformation. La première de ces méthodes est indiquée en partie dans le rapport Girerd-Servanty déjà cité; elle est basée sur le fait qu'un faisceau de droites issues du centre donne, après la transformation de Joukovsky un réseau d'hyperboles homofocales.

Plus précisément, appelons ζ le plan des contours à transformer, ζ_1 le plan des contours transformés et soit M un point d'affixe ζ . On cherche à construire le point M_1 du plan ζ_1 tel que :

$$\zeta = \zeta_1 + \frac{\beta^2}{\zeta_1}$$

Or, dans la superposition des deux plans ζ et ζ_1 , une droite issue du centre de transformation dans le plan ζ_1 est asymptote à la branche d'hyperbole qui est sa transformée. D'autre part, cette hyperbole a pour foyers les deux points F et F' (figure 6-1, page 84) d'affixe 2β et $2\beta e^{i\pi}$. On en déduit donc que le point M_1 se trouve sur l'asymptote de la branche d'hyperbole qui passe par M et qui a pour foyers F et F'. Cette asymptote se construit facilement (voir fig. 6-1, page 84). Joignons MF' et MF. De F' comme centre, (c'est-à-dire du foyer qui n'est pas à l'intérieur de la branche d'hyperbole passant par M), traçons un cercle G de rayon F'N, différence des distances de M à F et à F'. Traçons la tangente à G issue de F. La perpendiculaire issue du centre de transformation à cette tangente est l'asymptote cherchée. Le point M_1 est, d'après la construction de



Treffitz, à l'intersection de cette asymptote dont l'angle avec $O\xi$ est par exemple φ et de la droite issue de M et dont l'angle avec $O\xi$ est $(\pi - \varphi)$.

Cette méthode est purement graphique. La méthode indiquée par Theodorsen dans un rapport déjà cité fait intervenir par contre uniquement le calcul et les coordonnées cartésiennes des points. On peut en effet écrire la relation

$$\zeta = \zeta_1 + \frac{\beta^2}{\zeta_1}$$

sous la forme

$$\xi + i\eta = \beta \left[\frac{\rho}{\beta} e^{i\theta} + \frac{\beta}{\rho} e^{-i\theta} \right] = \beta \left[e^{\alpha + i\theta} + e^{-(\alpha + i\theta)} \right]$$

avec des notations qui se comprennent d'elles-mêmes. D'où

$$\begin{aligned} \xi + i\eta &= 2\beta \operatorname{ch}(\alpha + i\theta) = 2\beta \operatorname{ch} \alpha \cos \theta + 2i\beta \operatorname{sh} \alpha \sin \theta \\ \begin{cases} \xi &= 2\beta \operatorname{ch} \alpha \cos \theta \\ \eta &= 2\beta \operatorname{sh} \alpha \sin \theta \end{cases} \end{aligned}$$

Soit encore

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = \frac{\xi^2}{4\beta^2 \operatorname{ch}^2 \alpha} + \frac{\eta^2}{4\beta^2 \operatorname{sh}^2 \alpha} = 1$$

$$\operatorname{sh} \alpha = \frac{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 - 4\beta^2} + \sqrt{(\xi^2 + \eta^2 - 4\beta^2) + 16\eta^2 \beta^2}}{2\beta^2}$$

$$\sin \theta = \frac{\eta}{2\beta \operatorname{sh} \alpha} = \frac{\sqrt{-(\xi^2 + \eta^2 - 4\beta^2)} + \sqrt{(\xi^2 + \eta^2 - 4\beta^2) + 16\eta^2 \beta^2}}{8\beta^2}$$

Ces deux dernières formules permettent de déterminer l'argument θ et le module $\rho = \beta e^\alpha$ de l'affixe du point M , étant donnés les coordonnées ξ et η du point M et le module de transformation β . Nous n'avons donné cette seconde méthode que pour mémoire; elle n'est pas, à l'usage, d'un emploi très pratique, surtout lorsque le nombre de points à calculer devient assez important, comme c'est le cas dans notre exemple numérique.

Les profils indiqués au début de ce chapitre, et qui nous ont servi dans notre exemple sont indiqués dans la planche (page 97). Nous appellerons P le "gros" profil, R le "petit" et ζ leur plan. Pour passer de ce plan ζ au plan ζ_1 (voir chapitre II D), nous avons appliqué deux fois la transformation - inverse de celle de Joukowski - qui vient d'être écrite, en prenant pour base, dans la première, le gros profil P, qui donne un contour P_A se rapprochant sensiblement de la forme du cercle cependant que le petit profil R donne un contour R_A dont la forme reste très proche de celle d'un profil ordinaire (Plan ζ_A); et dans la seconde, le con-

tour R_A qui va donner un contour R_B assez proche d'un cercle tandis que le contour P_B transformé de P_A sera peu différent de celui-ci (*Plan ζ_B*). Cette manière d'opérer est, comme on peut le voir d'après ce que nous avons dit au chapitre IV celle qui donne le moins d'interactions des deux transformations.

Le choix des modules et des axes peut se faire de la manière suivante : Soit, par exemple, le profil R_A à transformer. On recherche le profil Joukovsky J ayant la même longueur, même épaisseur, et même courbure relative, et on le superpose à R_A en faisant correspondre les pointes arrières et les régions de bord d'attaque. On prend alors, dans la transformation ($R_A \rightarrow R_B$) le module et les axes qui font passer de J à un cercle C . Il est bien évident que par cette méthode on arrive au contour R_B qui se rapproche le plus du cercle C .

Cependant nous avons dit que les écarts entre le contour et le cercle correspondant ne devaient pas être trop importants pour que l'approximation faite dans la suite des calculs soit valable.

Or, on constate justement, sur les deux contours P_B et R_B des écarts notables avec les cercles qui s'en rapprochent le plus. Ces écarts proviennent du fait que la loi des épaisseurs suivant la corde peut être pour les profils P et R_A très différente de celle des profils Joukovski correspondants. Par exemple, le profil P présente au quart arrière, une anomalie très brusque dans la distribution des épaisseurs, anomalie qui se retrouverait sous la forme d'une bosse très nette sur le contour P_B si l'on n'avait pris soin, avant de faire les deux transformations décrites, de l'atténuer par une méthode que nous indiquerons dans la suite. D'autre part, ce même profil P évolue, en gros, d'une manière bien différente d'un profil Joukovski, ce qui a pour effet de donner un contour P_B légèrement elliptique (le grand axe étant à 45° par rapport à l'axe réel de transformation correspondant).

Ces deux sortes de différences peuvent être réduites par une transformation simple. Nous avons choisi en l'occurrence deux transformations de Joukovski :

Soit, par exemple, un contour c qui présente (*fig.6-2, page 86*) au milieu d'une courbe évoluant lentement et régulièrement (*plan z*) une "protubérance brusque", que l'on veut atténuer, dans la région A . On voit qu'il suffit de faire

$$Z = z + \frac{b^2}{z}$$

avec des axes correctement choisis pour obtenir, dans le plan Z le résultat désiré, c'est-à-dire un contour c beaucoup plus régulier. On choisit le module b en se fixant la correspondance de deux points sur un des axes, par exemple en s'imposant que

$$|Z| = \overline{OB} \quad \text{lorsque} \quad |z| = \overline{OG}$$

ce qui donne

$$b^2 = \overline{OG}^2 - \overline{OB} \cdot \overline{OG}$$

Cette méthode nous a permis de passer du contour P au contour P'_A dont la loi d'épaisseur suivant la corde à l'arrière ne présente que des variations lentes au quart arrière, en comparaison de celles du profil P . En ce qui concerne le fait que le contour P_B est légèrement elliptique, on peut y remédier en observant qu'une transformation de Joukovski

$$Z' = z + \frac{b'^2}{z'}$$

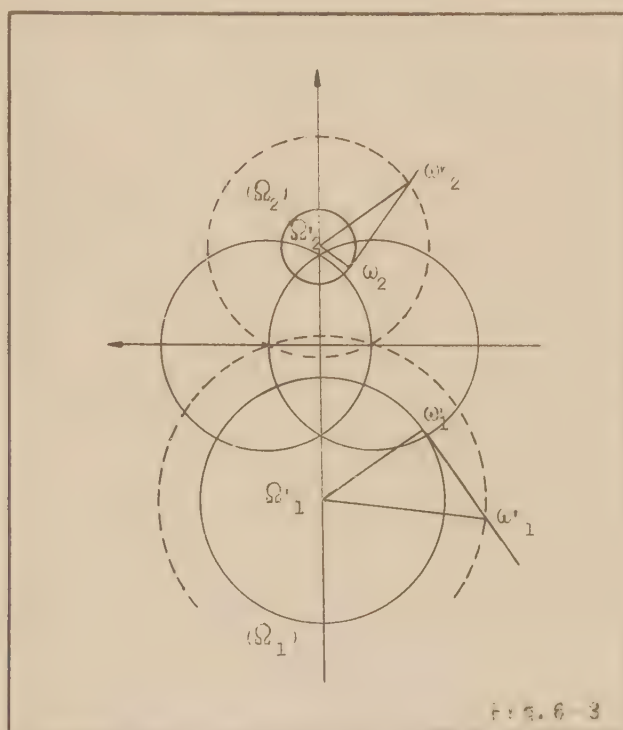
fait passer d'un cercle centré au centre des coordonnées du plan z' (donc d'équa-

Les contours P_1 et R_1 sont très peu différents de cercles convenablement choisis; les écarts sont de l'ordre de 3 à 4% sur les rayons. Pour transformer ces contours en cercles concentriques P_3 et R_3 , il faut d'abord passer dans le plan ζ_2 des contours P_2 et R_2 presque circulaires et sensiblement concentriques. Pour ce faire, nous avons assimilé, un instant, les deux contours P_1 et R_1 aux deux cercles qui les remplacent le mieux. On sait alors qu'une inversion par rapport à l'un des deux points limites du faisceau déterminé par ces deux cercles donne deux nouveaux cercles concentriques l'un à l'autre; de même, au lieu de l'inversion, la transformation conforme :

$$\zeta_2 = \frac{A}{\zeta_1}$$

en prenant comme nouvelle origine l'un des points limites.

C'est cette transformation que nous avons employée ici. La détermination du nouveau centre des coordonnées peut se faire de la manière suivante, en assimilant toujours P_1 et R_1 à deux cercles que nous appellerons, par exemple Ω_1 et Ω_2 (figures 6-3) : tout cercle orthogonal aux cercles d'un faisceau, passant par les



points limites de ce faisceau et étant naturellement centré sur la médiatrice du segment limité par ces points, il suffit, pour obtenir ceux-ci, de mener à chacun des cercles Ω_1 et Ω_2 une tangente en un point quelconque par exemple en ω_1 et ω_2 , et de prendre sur chacune de ces tangentes une longueur commune, par exemple

$$r = \omega_1 \omega'_1 = \omega_2 \omega'_2$$

Si nous appelons Ω'_1 et Ω'_2 les centres des cercles précédents, les intersections des cercles de rayon $\Omega'_1 \omega'_1$ et $\Omega'_2 \omega'_2$ et de centre Ω'_1 et Ω'_2 seront les centres de deux cercles de rayon r , orthogonaux aux précédents et coupant l'axe $\Omega_1 \Omega_2$ aux

deux points limites cherchés. Nous avons choisi, comme centre d'inversion dans notre cas, le point tel que le contour Γ_1 corresponde, dans le plan ζ_2 , au plus grand des contours, le petit contour R_1 correspondant au petit contour R_2 intérieur à P_1 .

En ce qui concerne la transformation suivante et que nous avons décrite au chapitre III, nous indiquerons seulement que nous avons tiré les divers coefficients α_n , β_n , γ_n et δ_n des formules 40 et 41 par application d'une méthode de M. Le Besnaraïs (*Emploi pratique de la série de Fourier : Bulletin de l'Association Technique Maritime et Aéronautique. N° 39. Session de 1935 Page 261*). Cette méthode permet de calculer 36 coefficients de la série de Laurent qui nous intéresse, connaissant 36 valeurs de ε_p et de ε_R sur chacun des contours P_2 et R_2 , par une suite de calculs relativement simples et courts. En réalité, nous n'avons pas gardé par la suite ce nombre important de coefficients, les quelques premiers ayant une valeur beaucoup plus grande que les suivants.

Nous ne décrirons pas cette méthode où les simplifications résident surtout dans un assemblage particulier des divers coefficients à calculer. On pourra se reporter pour les précisions nécessaires à la note citée.

Nous aurons besoin, par la suite, du module de la dérivée de la fonction de transformation ($\zeta_3 = \zeta_2 e^{H(\zeta_2)}$) qui s'écrit :

$$\frac{d\zeta_3}{d\zeta_2} = e^{H(\zeta_2)} + H'(\zeta_2) \zeta_2 e^{H(\zeta_2)} = e^{H(\zeta_2)} \times [1 + H'(\zeta_2) \zeta_2]$$

Or les quantités $H(\zeta_2)$ et $\zeta_2 H'(\zeta_2)$ sont très petites aussi bien dans leur partie réelle que dans leur partie imaginaire et nous avons admis la formule approchée suivante :

$$\left| \frac{d\zeta_3}{d\zeta_2} \right| \sim \left\{ 1 - \mathcal{R}[H(\zeta_2)] \right\} \left\{ 1 - \mathcal{R}[\zeta_2 H'(\zeta_2)] \right\}$$

le signe $\mathcal{R}[\]$ signifiant : Partie réelle de

Cette formule simplifiée permet des calculs beaucoup plus rapides au moyen des éléments du calcul de $H(\zeta_2)$.

Enfin, la dernière transformation citée au Chapitre III n'offre aucune difficulté et nous n'y reviendrons que pour faire la remarque suivante.

La transformation de Lagally :

$$Z = \text{Log} \frac{z+c}{z-c}$$

qui fait passer du plan z de deux cercles extérieurs au plan du rectangle peut s'écrire :

$$Z = \text{Log} \left[1 + \frac{2c}{z-c} \right]$$

ou encore :

$$Z = \text{Log}(1+\zeta_3) \quad \text{avec} \quad \zeta_3 = \frac{2c}{z-c}$$

Compte non tenu de la transformation $\zeta_3(\zeta_2)$ les deux dernières transformations employées dans notre méthode sont comparables à celle-ci, aux constantes près et par conséquent les éléments du potentiel de Lagally doivent bien se retrouver ici

6-2 - CALCUL DES VITESSES.

Le calcul des vitesses autour des deux profils d'une aile à fente arrière, indiqué à la fin du paragraphe 2 du chapitre III se présente exactement comme simplement que dans les deux chapitres précédents.

En effet, aux chapitres IV et V, les valeurs numériques du potentiel de Lagally et, par suite, de la vitesse, étaient directement calculables à partir des données géométriques des deux cercles primitifs de transformation, et des données aérodynamiques (points de vitesse nulle et angle d'incidence de la vitesse à l'infini).

Les dérivées des fonctions de transformation successives n'intervenaient donc pas dans ces calculs.

Il n'en va pas de même ici, puisque l'intensité du doublet primitif du plan du rectangle périodique ne peut être obtenue sans la détermination préalable de toute la suite des transformations.

Cette intensité du doublet étant calculée et la correspondance entre les points des profils et les points du rectangle étant établie, le calcul des vitesses ne présente plus d'autres difficultés spéciales.

Toutefois, comme la suite des transformations est assez longue, les détails des calculs théoriques seront illustrés, à mesure qu'ils se rencontreront, par l'exemple numérique.

L'ordre des calculs numériques, imposé par ce que nous venons de voir, sera donc le suivant :

- Détermination des paramètres des fonctions de transformation et de la correspondance entre les points d'un profil et ceux des contours des plans transformés.
- Calcul des éléments servant à la détermination du potentiel de Lagally. *(Ceci impose le calcul numérique de la forme des dérivées de transformation).*
- Détermination des vitesses sur le contour du rectangle.
- Calcul des dérivées successives pour tous les points choisis sur le contour des profils et des vitesses.

Les profils qui servent de base à l'exemple numérique sont représentés sur la planche p. 97 au braquage choisi, ainsi que les points pour lesquels les vitesses et les pressions ont été déterminées. Le braquage, assez grand, correspond en fait à un cas réel souvent rencontré en pratique. La position des points choisis s'explique d'elle-même sur la figure.

6-21 - Détermination des fonctions de transformation et des éléments du potentiel de Lagally.

Les transformations qui font passer des profils P et R aux contours P_1 et R_1 , étant des transformations de Joukowski, ou inverses, n'offrent aucune difficulté de recherche et nous n'y reviendrons pas. On trouvera sur la planche page 99 les résultats de ces calculs et de ces constructions, à savoir les deux contours P_1 et R_1 du plan ζ_1 .

Nous n'avons pas donné ici les constantes des transformations intermédiaires: elles ne présentent aucune particularité.

En fait, le seul problème nouveau par rapport aux précédents chapitres commence avec les contours du plan ζ_2 .

C'est seulement à la suite de la transformation $\zeta_2 = \frac{A}{\zeta_1}$ que la forme de l'écoulement autour des deux contours change. Les contours P_2 et R_2 du plan ζ_2 , déterminés comme il a été dit au paragraphe 6-1 du présent chapitre, sont représentés sur la planche. Le calcul des éléments du potentiel est extrêmement simple.

Comme on l'a montré au paragraphe 3 du chapitre III, la valeur absolue de la circulation résultante reste inchangée par cette transformation; quant au doublet, son intensité $V_0 e^{-i\alpha} A$ qui correspond à la vitesse à l'infini, $(V_0 e^{-i\alpha})$ du plan ζ_1 et des plans précédents, dépend du module de transformation A . En fait, la valeur numérique de A est sans importance sur la suite des calculs. En effet, la vitesse complexe correspondant à ce doublet dans le plan ζ_1 sera :

$$\frac{df_D}{d\zeta_1} = \frac{df_D}{d\zeta_2} \frac{d\zeta_2}{d\zeta_1} = \frac{-V_0 e^{-i\alpha} A}{\zeta_2^2} \frac{d\zeta_2}{d\zeta_1} = \frac{-V_0 e^{-i\alpha} A}{\left(\frac{A}{\zeta_1}\right)^2} \times \frac{-A}{(\zeta_1')^2} = V_0 e^{-i\alpha}$$

comme il fallait s'y attendre. La constante A disparaît donc du résultat des calculs et de la valeur de la vitesse sur les contours. Nous reviendrons par la suite sur la valeur qu'il convient de donner à cette constante. Une valeur plus importante à noter est celle de l'angle α qui n'est égal à l'angle d'incidence i pour lequel sont calculées les vitesses sur les profils qu'à une constante près. Cette constante est l'angle que font l'axe de référence primitif et l'axe réel de la transformation $\zeta_1 \rightarrow \zeta_2$ (axe qui joint les centres des pseudo-cercles P_1 et R_1) dans la superposition des deux plans correspondants. D'après les constructions faites, on trouve que la valeur de cet angle $(i - \alpha)$ est ici $12^\circ 40'$.

Le choix du centre O_3 de la transformation suivante $\zeta_3 = \zeta_2 e^{H(\zeta_2)}$ est, comme nous l'avons vu au paragraphe 2 du chapitre III, assez arbitraire; toutefois, cette recherche est facilitée par le fait que les valeurs de ε_p et de ε_R doivent être aussi petites que possible: les essais graphiques nécessaires pour parvenir à une position correcte sont peu nombreux. (Le point O_3 est indiqué sur les planches page 99).

La condition: $\int \varepsilon_p d\theta = \int \varepsilon_R d\theta$ impose le rayon q du petit cercle S_3 en fonction du rayon (1) de P_3 ; on trouve, dans l'exemple, avec une valeur sensiblement nulle de ces sommes :

$$q = 0,2579.$$

Nous n'indiquerons pas les calculs numériques qui ont conduit à la détermination des coefficients de la fonction $H(\zeta_2)$ par la méthode indiquée aux paragraphes 3-2 (chapitre III) et 2 (chapitre VI): On trouve, tous calculs faits, que $H(\zeta_2)$ prend la forme :

$$\begin{aligned} -H(\zeta_2) = & (0,02070 - i 0,00124) \zeta_2 + (0,00833 + i 0,00688) \zeta_2^2 \\ & + (-0,000348 - i 0,00160) \zeta_2^3 + (-0,00430 + i 0,00514) \zeta_2^4 \\ & + (0,000321 + i 0,00174) \zeta_2^{-1} + (-0,000381 - i 0,00100) \zeta_2^{-2} \\ & + (0,000105 + i 0,000176) \zeta_2^{-3} + (-0,0000195 + i 0,0000229) \zeta_2^{-4} \end{aligned}$$

l'axe d'origine étant l'axe $\vec{O_3O_2}$ (O_2 est le centre de la transformation précédente dans la superposition des plans ζ_2 et ζ_3).

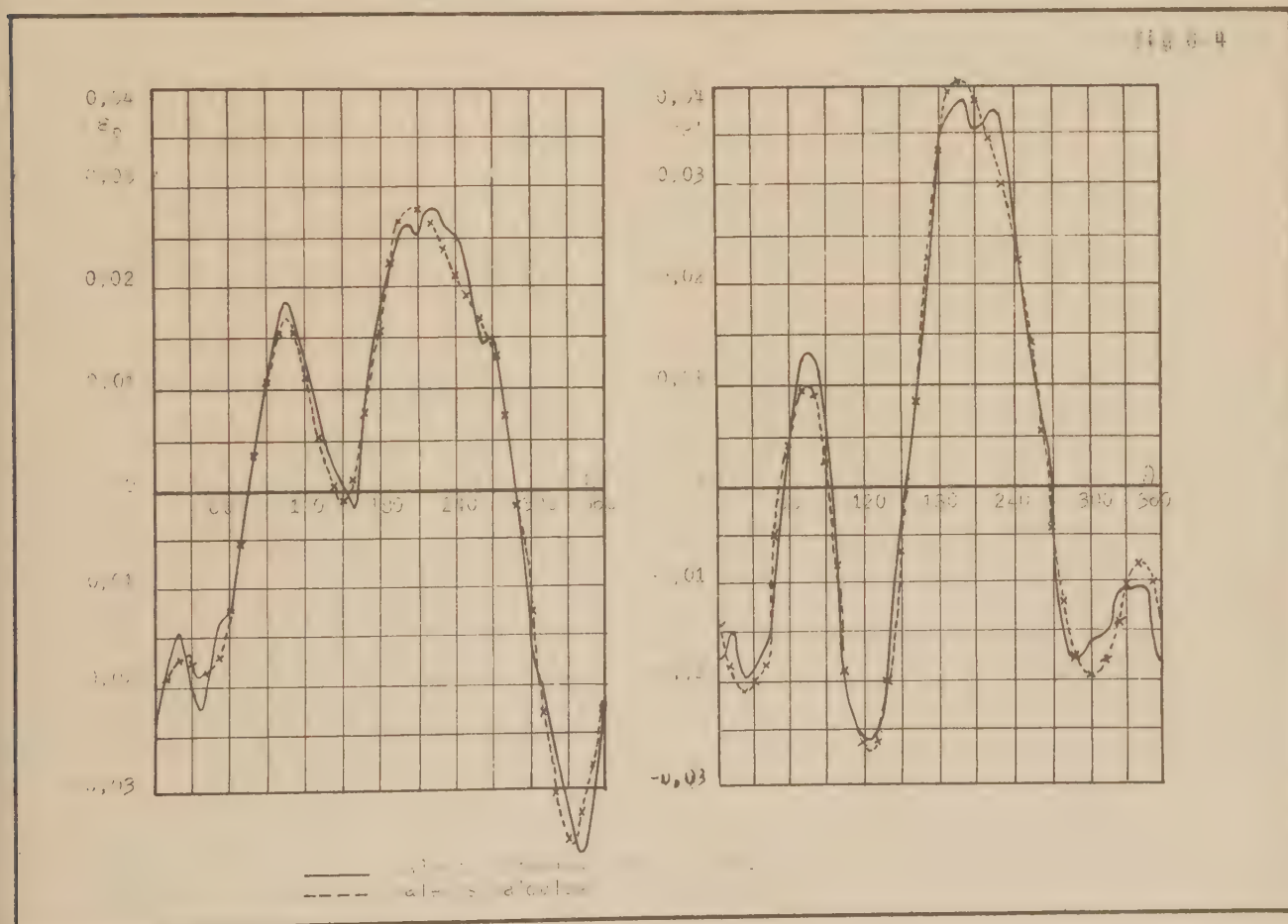
La planche 6-4 montre la comparaison entre les valeurs réelles de ε_p et de ε_R telles qu'elles ont été relevées sur une épure et les valeurs calculées au moyen de la formule $\zeta_3 = \zeta_2 e^{H(\zeta_2)}$ en employant les seuls coefficients indiqués ci-dessus. L'accord semble suffisant et il ne paraît pas nécessaire de pousser plus avant la recherche de nouveaux coefficients.

Les calculs relatifs à la fonction $H(\zeta_2)$ supposent, par commodité, que le rayon de P_3 soit égal à 1. Cela impose donc les dimensions de P_2 a posteriori, puis de A , si les dimensions des profils et, par conséquent, de P_1 sont fixées par avance.

A la suite de la transformation $\zeta_2 \rightarrow \zeta_3$ le doublet et le tourbillon qui se trouvaient dans le plan ζ_2 en O_2 , vont se placer en un point M différent de O_2 dans la superposition des plans ζ_2 et ζ_3 . Ce point M étant le transformé de O_2 , on a toujours la relation :

$$\zeta_3 = \zeta'_2 e^{H(\zeta_2)}$$

où ζ_3 est ici l'affixe de M et ζ'_2 celle de O_2 dans le plan ζ_3 .



Dans l'exemple numérique : $\zeta'_2 = 0,6721$ avec l'échelle indiquée sur la plan-

Pour cette valeur de ζ'_2 , la fonction $H(\zeta_2)$, calculée avec les coefficients donnés ci-dessus, vaut elle-même :

$$-H(\zeta_2') = 0,0199 + i 0,0039$$

$$\text{donc : } \zeta_{3(M)} = 0,6588 e^{-i 0,0039}$$

Le déplacement de O_2 vers M s'effectue donc par une translation vers O_3 et par une déviation vers le bas de plus $0^\circ 2$.

D'autre part, l'intensité du doublet qui était dans le plan $\zeta_2 : V_0 e^{-i\alpha} A$, devient ici :

$$AV_0 e^{-i\alpha} \frac{d\zeta_3}{d\zeta_2}, \text{ la dérivée étant calculée au point M.}$$

On trouve, tous calculs faits :

$$\left(\frac{d\zeta_3}{d\zeta_2'}\right)_M = 0,9695 e^{-i 0,01164}$$

La dernière transformation, qui fait passer du plan des deux contours circulaires au rectangle périodique de Lagally ne présente aucune difficulté.

La valeur de c_0 (voir équation du paragraphe 3-2) est choisie de telle sorte que le doublet vienne, dans le plan du rectangle, au centre des coordonnées.

On trouve alors, tous calculs faits, les valeurs suivantes des constantes bien connues :

$$c_0 = i\pi + \text{Log}|O_3M| = i\pi - 0,41835$$

$$\alpha = -\text{Log}|O_3M| = 0,41835$$

$$-\beta = \text{Log } q - \text{Log}|O_3M| = -0,93670$$

L'intensité du doublet qui était, $A V_0 e^{-i\alpha} \frac{d\zeta_3}{d\zeta_2}$ dans le plan ζ_3 devient ici :

$$AV_0 e^{-i\alpha} \times 0,9695 e^{-i 0,01164} e^{-i\pi} \times \frac{1}{0,6588}$$

$\frac{e^{-i\pi}}{0,6588}$ étant la valeur de la dérivée $\frac{d\zeta_4}{d\zeta_3}$ au point M.

6-22.- Détermination des vitesses dans le plan du rectangle.

Le calcul des vitesses dans le plan du rectangle est analogue ici à celui des cas traités dans les chapitres précédents. La seule différence provient du fait que l'intensité du doublet, - qui prenait auparavant une valeur fixe ($2c V_0 e^{-i\theta}$) - dépend, dans cette méthode, de la façon d'opérer la suite des transformations. La valeur de cette intensité est donc variable suivant les exemples traités et doit être déterminée dans chaque cas comme il vient d'être fait ci-dessus.

Ceci étant posé, les dernières formules du paragraphe 2-5 qui permettent la détermination des vitesses dans le plan du rectangle pour le potentiel de Lagally sont directement applicables ici. Il suffit seulement de remplacer la valeur :

$$2c V_0 e^{-i\theta} \quad \text{par} \quad 2AV_0 e^{-i(\alpha + 0,01164)} \frac{0,9695}{0,6588}$$

On trouvera ce calcul pour les 30 points du rectangle correspondant aux points choisis des deux profils dans le tableau de la page 94.

Les principales constantes qui interviennent ici, ont, pour valeur, d'après

les calculs qui viennent d'être faits :

$$2 \omega_1 = 2(\alpha + \beta) = 2,71010$$

$$2 \omega_3 = 2 i \pi$$

$$q = 0,00068685$$

$$\eta_1 = 0,60696$$

Les valeurs de Γ et de x , déterminées comme dans les chapitres précédents par identification des vitesses aux points d'arrêt arrière, deviennent, en appelant θ l'angle $\alpha + 0,01164$ et A_1 la constante $A \times \frac{0,9695}{0,6583}$.

$$\frac{i\Gamma}{2\pi} = 4iA_1V_0 (0,13198 \cos \theta - 1,37073 \sin \theta)$$

$$ix = 4iA_1V_0 (-0,04841 \cos \theta + 1,57101 \sin \theta)$$

Pour simplifier la présentation des résultats, nous avons posé, comme au chapitre IV:

$$W = -\frac{i\Gamma}{2\pi} [A' + B + C] + ix + 4iA_1V_0 \cos \theta [G + H] + 4iA_1V_0 \sin \theta [D + E + F]$$

soit encore, avec les valeurs de Γ et de x indiquées ci-dessus :

$$W = 4iA_1V_0 \left\{ \cos \theta [-0,13198 (A' + B + C) + 0,04841 + G + H] + \sin \theta [1,37073 (A' + B + C) + 1,57101 + D + E + F] \right\}$$

Les différents symboles A, B, C, ..., ont la même signification qu'au chapitre IV; le côté du rectangle d'équation $X = \alpha$ correspond au profil principal.

De l'équation de la circulation, on déduit, que l'angle de portance nulle est: $\theta = + 5^\circ 30'$, soit $\alpha = 4^\circ 50'$ ou encore : $i = 17^\circ 30'$ environ par rapport à la corde de référence des profils NACA. Cette valeur de i est sensiblement la même que la valeur expérimentale indiquée pour ce braquage de volet dans le Rapport NACA 664.

23 - Détermination des vitesses dans le plan des profils C_z global.

Le tableau page 94 indique la valeur de la vitesse en chacun des 30 points choisis des deux profils. Il n'a pas paru nécessaire de reproduire le calcul des dérivées des fonctions de transformation successives, ce calcul étant analogue à ceux qui ont déjà été faits. Seul, le résultat final a été indiqué; la valeur de A ($A = 70,373$), qui figure dans ce résultat, correspond à une longueur du profil primitif, évaluée en millimètres, de $e = 500$. Les valeurs numériques de la dérivée ($d\zeta_1/d\zeta_2$) sont peu différentes de 1 comme il fallait s'y attendre.

De l'équation de la circulation totale, on peut tirer le C_z global :

$$100 C_z = 100 \frac{2\Gamma}{lV_0} = 68,70 \cos \theta - 713,55 \sin \theta$$

.../

[illegible]

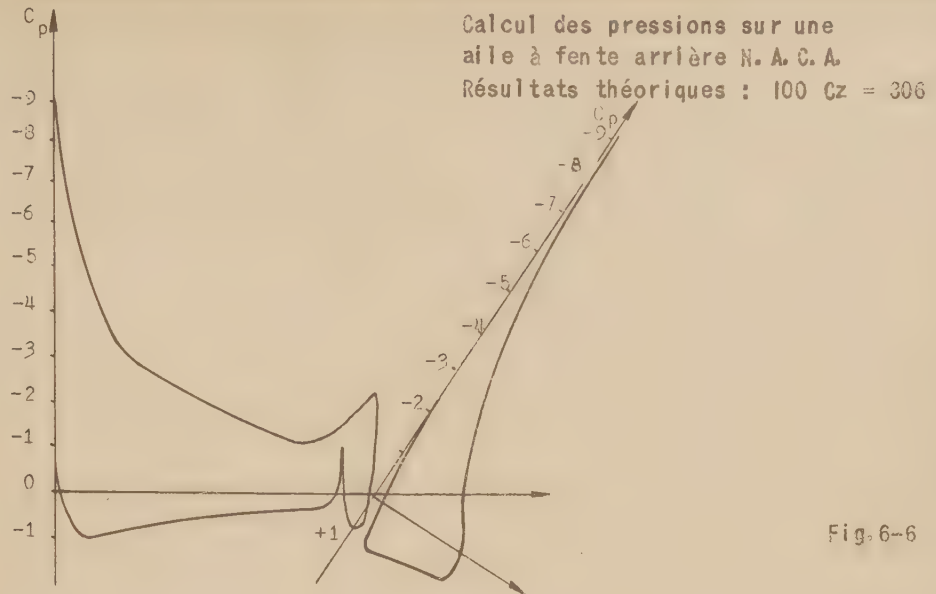


Fig. 6-6

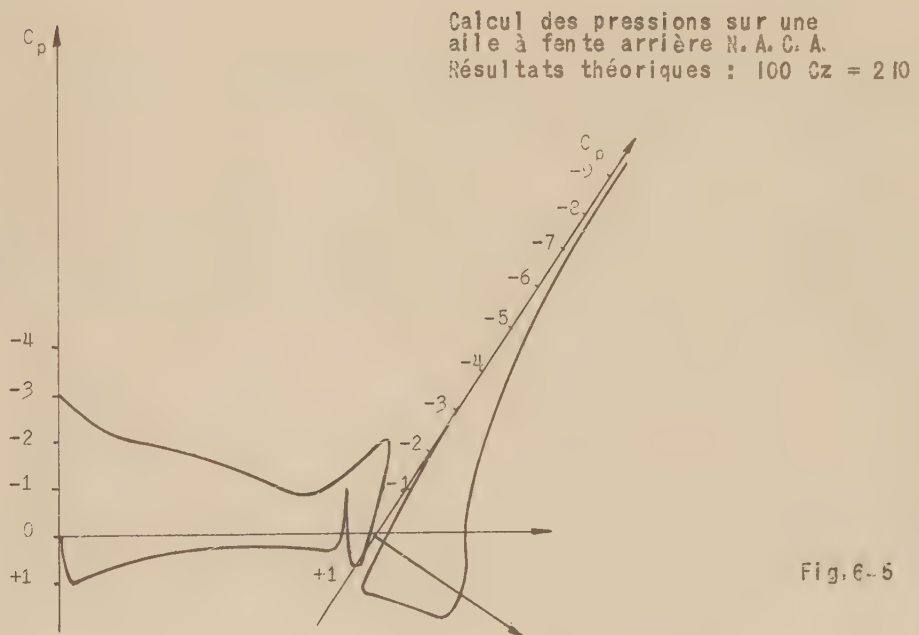
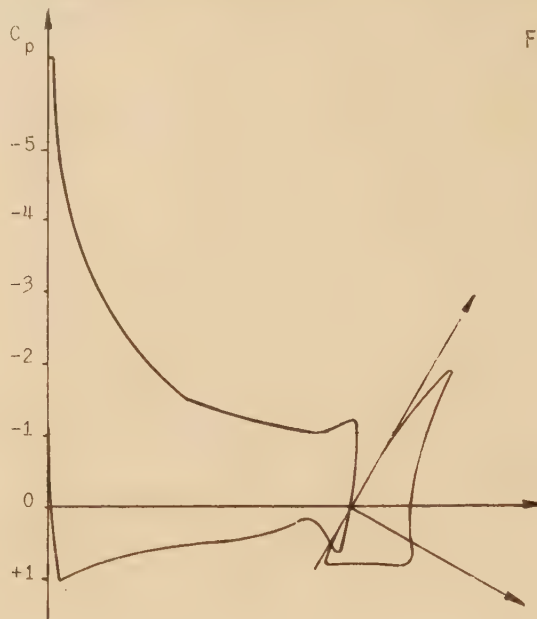


Fig. 6-5

Calcul des pressions sur une aile à fente arrière
N. A. C. A.- résultats expérimentaux.

Fig.6-7



6-3 - CONCLUSION -

L'exemple numérique qui figure dans les pages précédentes a été traité surtout dans le but de montrer la simplicité relative de la méthode employée. Les calculs sont relativement peu nombreux et les épures assez faciles pour que cette méthode soit directement applicable.

Par ailleurs, elle se justifie d'elle-même si l'on compare les résultats numériques obtenus avec les résultats expérimentaux (voir planches p. 96 - 97 - 98). Cette comparaison montre que la forme des courbes théoriques de pressions, extrêmement curieuse, se retrouve d'une façon remarquable, du moins qualitativement, pour les courbes expérimentales.

**Fig. 6-8**

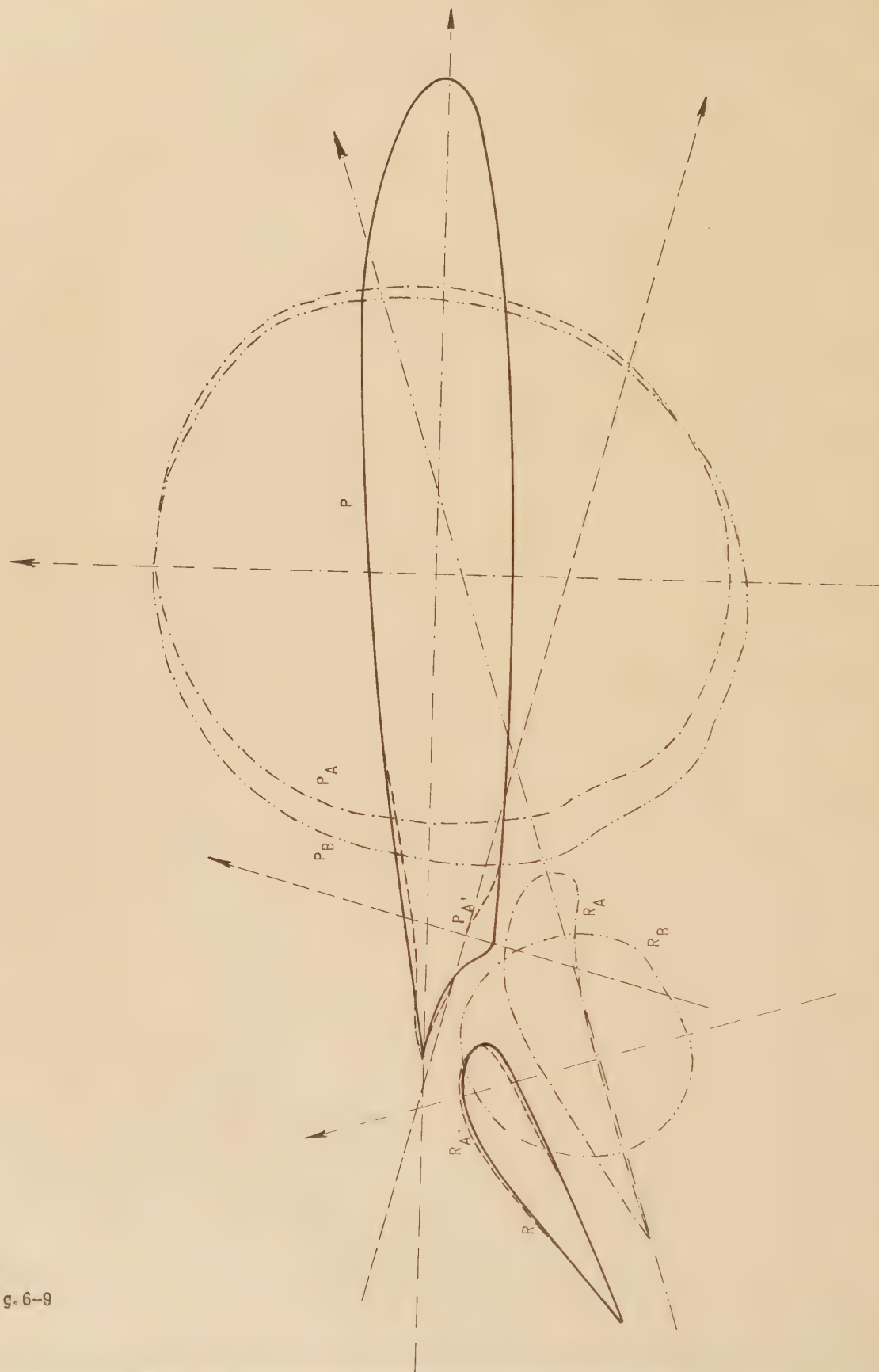


Fig. 6-9

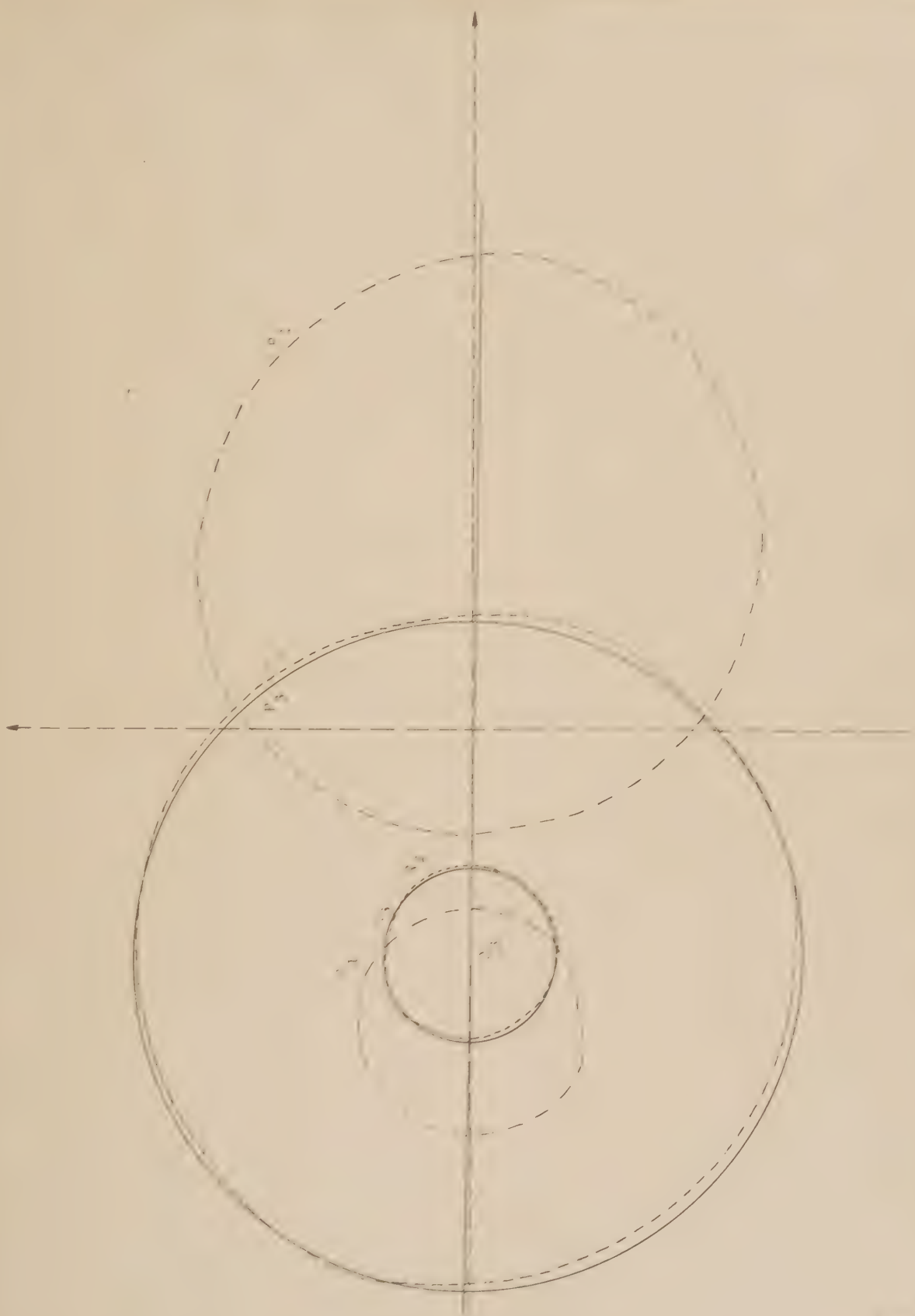


Fig. 6-10

APPENDICE

NOTES SUR LE CALCUL
DE CERTAINES FONCTIONS ELLIPTIQUES

Appendice

NOTE SUR LE CALCUL NUMERIQUE DE CERTAINES FONCTIONS ELLIPTIQUES

I - EXISTENCE DE FONCTIONS DOUBLEMENT PERIODIQUES.

La plupart des calculs de cet exposé sont basés sur la recherche des valeurs numériques d'une fonction de variable complexe, uniforme, doublement périodique, (possédant une période réelle et une période imaginaire pure) et dont les points singuliers sont des pôles doubles.

Nous allons montrer que la fonction $\phi(u)$, u étant la variable, définie de la manière suivante :

$$\phi(u) = \frac{d}{du} \zeta(u) \quad (1) \qquad \zeta(u) = \frac{d}{du} \text{Log } \sigma(u) \quad (2)$$

avec :

$$\sigma(u) = \frac{2\omega_1}{\pi} q_0^{-2} e^{\frac{i\eta_1 u^2}{2\omega_1}} \sin \frac{\pi u}{2\omega_1} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - q^{2n} e^{\frac{i\pi u}{\omega_1}}\right) \left(1 - q^{2n} e^{-\frac{i\pi u}{\omega_1}}\right) \quad (3)$$

répond bien à la question :

Les deux périodes seront pour nous : $2\omega_1$ (réelle) et $2\omega_3$ (imaginaire pure). En réalité, d'une manière plus générale, on pourrait supposer que ces deux périodes sont imaginaires d'une façon quelconque, mais nous n'aurons pas à nous occuper de ces cas. On a d'autre part :

$$q_0 = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n}) \quad \text{et} \quad q = e^{\frac{\pi\omega_3}{i\omega_1}} \quad (4)$$

η_1 est une constante qui se définira d'elle-même par la suite. En ce qui concerne la valeur de q , nous la supposons toujours inférieure à 1. Il suffit pour cela que $-\frac{\pi\omega_3}{i\omega_1} < 0$ ce qu'il est toujours possible de faire en changeant à la rigueur

le signe de l'une des périodes. Cela n'a aucune importance dans la suite puisqu'il est bien évident qu'une fonction qui admet la période $2\omega_\alpha$ admet aussi la période $-2\omega_\alpha$.

$$\text{En écrivant : } \sin \frac{\pi u}{2\omega_1} = \frac{e^{\frac{i\pi u}{2\omega_1}} - e^{-\frac{i\pi u}{2\omega_1}}}{2i} = \frac{e^{\frac{i\pi u}{2\omega_1}}}{2i} \left(1 - e^{-\frac{i\pi u}{\omega_1}}\right)$$

il vient :

$$\sigma(u) = \frac{\omega_1}{\pi i} q_0^{-2} e^{\left[\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1} + \frac{i\pi u}{2\omega_1}\right]} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - q^{2n} e^{\frac{i\pi u}{\omega_1}}\right) \left(1 - q^{2n-2} e^{-\frac{i\pi u}{\omega_1}}\right)$$

On a alors :

$$\sigma(u+2\omega_1) = -\frac{i\omega_1}{\pi} q_0^{-2} e^{\left[\frac{\eta_1}{2\omega_1} (u^2 + 4u\omega_1 + 4\omega_1^2) + \frac{i\pi u}{2\omega_1} + \frac{i\pi\omega_1}{\omega_1} \right]} \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^{2n} e^{\left[\frac{i\pi u}{\omega_1} + \frac{2i\pi\omega_1}{\omega_1} \right]}) (1-q^{2n-2} e^{-\left[\frac{i\pi u}{\omega_1} + \frac{2i\pi\omega_1}{\omega_1} \right]}),$$

c'est-à-dire encore :

$$\sigma(u+2\omega_1) = -\frac{i\omega_1}{\pi} q_0^{-2} e^{\left[\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1} + \frac{i\pi u}{2\omega_1} \right]} (-1) e^{2\eta_1(u+\omega_1)} \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^{2n} e^{\frac{i\pi u}{\omega_1}}) (1-q^{2n-2} e^{-\frac{i\pi u}{\omega_1}})$$

$$\boxed{\sigma(u+2\omega_1) = -e^{2\eta_1(u+\omega_1)} \sigma(u)} \quad (5)$$

De même :

$$\sigma(u+2\omega_3) = -\frac{i\omega_3}{\pi} q_0^{-2} e^{\left[\frac{\eta_3}{2\omega_3} (u^2 + 4u\omega_3 + 4\omega_3^2) + \frac{i\pi u}{2\omega_3} + \frac{i\pi\omega_3}{\omega_3} \right]} \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^{2n} e^{\left[\frac{i\pi u}{\omega_3} + \frac{2i\pi\omega_3}{\omega_3} \right]}) (1-q^{2n-2} e^{-\left[\frac{i\pi u}{\omega_3} + \frac{2i\pi\omega_3}{\omega_3} \right]}),$$

Or en utilisant la formule (4) :

$$\sigma(u+2\omega_3) = -\frac{i\omega_3}{\pi} q_0^{-2} e^{\left[\frac{\eta_3 u^2}{2\omega_3} + \frac{i\pi u}{2\omega_3} \right]} q e^{\frac{\eta_3}{\omega_3} (2u\omega_3 + 2\omega_3^2)} \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^{2n+2} e^{\frac{i\pi u}{\omega_3}}) (1-q^{2n-4} e^{-\frac{i\pi u}{\omega_3}})$$

$$\begin{aligned} &= \sigma(u) q e^{\frac{\eta_3}{\omega_3} (2u\omega_3 + 2\omega_3^2)} \frac{1-q^{-2} e^{-\frac{i\pi u}{\omega_3}}}{1-q^2 e^{\frac{i\pi u}{\omega_3}}} = \sigma(u) q e^{\frac{\eta_3}{\omega_3} (2u\omega_3 + 2\omega_3^2)} \frac{q^{-1} e^{-\frac{i\pi u}{\omega_3}}}{-q e^{\frac{i\pi u}{\omega_3}}} \\ &= -\sigma(u) q^{-1} e^{\frac{i\pi u}{\omega_3} + \frac{\eta_3}{\omega_3} (2u\omega_3 + 2\omega_3^2)} = \sigma(u) e^{\frac{u}{\omega_3} (2\eta_3\omega_3 - i\pi) + \frac{\omega_3}{\omega_3} (2\eta_3\omega_3 - i\pi)} \end{aligned}$$

Nous définirons la constante η_3 de la manière suivante, ce qu'il nous sera loisible de vérifier par la suite :

$$\eta_1\omega_3 - \eta_3\omega_1 = \frac{i\pi}{2}$$

Il vient par conséquent :

$$\boxed{\sigma(u+2\omega_3) = -e^{2\eta_3(u+\omega_3)} \sigma(u)} \quad (6)$$

On déduit donc, par exemple de la formule (2) et de la formule (6)

$$\text{Log } \sigma(u+2\omega_3) = i\pi + 2\eta_3(u+\omega_3) + \text{Log } \sigma(u)$$

et

De même

$$\boxed{\begin{aligned} \zeta(u+2\omega_3) &= \zeta(u) + 2\eta_3 \\ \zeta(u+2\omega_1) &= \zeta(u) + 2\eta_1 \end{aligned}} \quad (7)$$

En dérivant une nouvelle fois ces deux formules (7) il vient :

$$\boxed{\begin{aligned} \phi(u+2\omega_1) &= \phi(u) \\ \phi(u+2\omega_3) &= \phi(u) \end{aligned}} \quad (8)$$

On voit immédiatement sur la formule (3) que $\sigma(u)$ est une fonction impaire. Par conséquent $\zeta(u)$ est aussi impaire. Si maintenant, dans la première des formules (7) on fait : $u = -\omega_3$ il vient :

$$\left. \begin{aligned} \zeta(\omega_3) &= \zeta(-\omega_3) + 2\eta_3 \quad \text{ou} \quad \zeta(\omega_3) = \eta_3 \\ \zeta(\omega_1) &= \eta_1 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

De même

Nous définirons η_1 de la manière suivante (1°) :

D'après la formule (3) on peut écrire, au voisinage du point u :

$$\sigma(u) = \frac{2\omega_1}{\pi} \left(\frac{\pi u}{2\omega_1} - \frac{\pi^3 u^3}{48\omega_1^3} + \dots \right) \left(1 + \frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1} + \frac{\eta_1^2 u^4}{8\omega_1^2} + \dots \right) \prod_1^{\infty} \left\{ \frac{(1-q^{2n})^2 + q^{2n} \frac{\eta_1^2 u^2}{\omega_1^2} + \dots}{(1-q^{2n})^2} \right\}$$

$$\text{ou} \quad \sigma(u) = \frac{2\omega_1}{\pi} \left(\frac{\pi u}{2\omega_1} - \frac{\pi^3 u^3}{48\omega_1^3} + \dots \right) \left(1 + \frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1} + \frac{\eta_1^2 u^4}{8\omega_1^2} + \dots \right) \left(1 + \frac{\pi^2 u^2}{\omega_1^2} \sum_1^{\infty} \frac{q^{2n}}{(1-q^{2n})^2} + \dots \right)$$

"De sorte que $\sigma(u)$ apparaît comme une fonction impaire, entière en u dont le premier terme est u ." Nous choisirons la constante η_1 de telle sorte que le développement de $\sigma(u)$ en série de Taylor au voisinage de u n'ait pas de terme de 3ème degré, ce qui revient à écrire :

$$2\omega_1 \eta_1 = \pi^2 \left[\frac{1}{6} - \sum \frac{4q^{2n}}{(1-q^{2n})^2} \right]$$

Ce développement de $\sigma(u)$ s'écrit donc :

$$\sigma(u) = u + Au^5 + Bu^7 + \dots \quad (1)$$

D'où

$$\zeta(u) = \frac{1}{u} + 4Au^3 + \dots \quad (2)$$

et

$$p(u) = \frac{1}{u^2} - 12Au^2 + \dots \quad (3)$$

La valeur donnée à η_1 conduit donc à prendre au voisinage du point u un développement de $p(u)$ sans terme constant.

Les notes précédentes, et en particulier la formule (10)(2) montrent que la fonction $\zeta(u)$ admet $u=0$ pour pôle simple avec le résidu 1. Les deux formules (7) prouvent que tous les points périodes sont également des pôles de même résidu. De même les formules (10)(3) et (8) montrent que tous les points périodes sont des pôles doubles avec un résidu nul, pour la fonction $p(u)$.

2 - PASSAGE A DES FORMULES PERMETTANT LE CALCUL NUMERIQUE

Nous allons montrer comment l'on peut passer de la définition des fonctions $p(u)$ et $\zeta(u)$ données par les formules (1), (2) et (3) à des définitions qui ne permettent plus aussi facilement de vérifier la double périodicité, mais qui sont par contre beaucoup plus facilement accessibles aux calculs numériques. Nous partons de la formule (3)

$$\sigma(u) = \frac{2\omega_1}{\pi} q_0^{-2} e^{\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}} \sin \frac{\pi u}{2\omega_1} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n} e^{\frac{i\pi u}{\omega_1}}) (1 - q^{2n} e^{-\frac{i\pi u}{\omega_1}})$$

En prenant les logarithmes des deux membres, il vient :

$$\text{Log } \sigma(u) = \text{Log } \frac{2\omega_1}{\pi} - \text{Log } q_0^{-2} + \frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1} + \text{Log } \sin \frac{\pi u}{2\omega_1} + \sum_{n=1}^{\infty} \text{Log} (1 - q^{2n} e^{\frac{i\pi u}{\omega_1}}) (1 - q^{2n} e^{-\frac{i\pi u}{\omega_1}})$$

En admettant des conditions assez larges, et en particulier :

$$q^{2n} e^{\frac{i\pi u}{\omega_1}} < 1 \quad q^{2n} e^{-\frac{i\pi u}{\omega_1}} < 1$$

les logarithmes des deux sommes peuvent se développer sous la forme :

$$\begin{aligned} \text{Log} (1 - q^{2n} e^{\frac{i\pi u}{\omega_1}}) &= - \frac{q^{2n} e^{\frac{i\pi u}{\omega_1}}}{1} - \frac{q^{4n} e^{\frac{2i\pi u}{\omega_1}}}{2} - \frac{q^{6n} e^{\frac{3i\pi u}{\omega_1}}}{3} - \dots = - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{q^{2mn} e^{\frac{i\pi u}{\omega_1}}}{m} \\ \text{Log} (1 - q^{2n} e^{-\frac{i\pi u}{\omega_1}}) &= - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{q^{2mn} e^{-\frac{i\pi u}{\omega_1}}}{m} \end{aligned}$$

En additionnant les deux sommes terme à terme (pour un même n), il vient :

$$\text{Log} (1 - q^{2n} e^{\frac{i\pi u}{\omega_1}}) + \text{Log} (1 - q^{2n} e^{-\frac{i\pi u}{\omega_1}}) = - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{q^{2mn}}{m} \left(e^{\frac{i\pi u}{\omega_1}} + e^{-\frac{i\pi u}{\omega_1}} \right) = - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{q^{2mn} \cos \frac{\pi u}{\omega_1}}{m}$$

D'autre part :

$$\text{Log } \sigma_0 = \text{Log } \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n}) = \sum_{n=1}^{\infty} \text{Log} (1 - q^{2n}) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(- \frac{q^{2n}}{1} - \frac{q^{4n}}{2} - \frac{q^{6n}}{3} - \dots \right) = - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{q^{2mn}}{m}$$

Et l'on a :

$$\begin{aligned}
\text{Log } \sigma(u) &= \text{Log } \frac{2\omega_1}{\pi} + \frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1} + \text{Log } \sin \frac{\pi u}{2\omega_1} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{2q^{2mn}}{m} \left(1 - \cos \frac{m\pi u}{\omega_1} \right) \right] \\
&= \text{Log } \frac{2\omega_1}{\pi} + \frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1} + \text{Log } \sin \frac{\pi u}{2\omega_1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{m} \sin^2 \frac{m\pi u}{2\omega_1} (q^{2m} + q^{4m} + q^{6m} + q^{8m} + \dots) \\
&= \text{Log } \frac{2\omega_1}{\pi} + \frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1} + \text{Log } \sin \frac{\pi u}{2\omega_1} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{q^{2m} (2 \sin \frac{m\pi u}{2\omega_1})^2}{m(1-q^{2m})}
\end{aligned}$$

En dérivant cette dernière formule, il vient

$$\zeta(u) = \frac{\eta_1 u}{\omega_1} + \frac{\pi}{2\omega_1} \cotg \frac{\pi u}{2\omega_1} + \frac{2\pi}{\omega_1} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{q^{2m} \sin \frac{m\pi u}{\omega_1}}{1-q^{2m}} \quad (11)$$

et en dérivant de nouveau :

$$\phi(u) = -\frac{\eta_1}{\omega_1} + \frac{\pi^2}{4\omega_1^2} \frac{1}{\sin^2 \frac{\pi u}{2\omega_1}} - \frac{2\pi^2}{\omega_1^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{q^{2m} \cos \frac{m\pi u}{\omega_1}}{1-q^{2m}} \quad (12)$$

Telle est l'expression des deux fonctions que nous emploierons dans la suite et que nous allons développer en vue des calculs numériques.

3 - ETABLISSEMENT DU CALCUL NUMERIQUE.

Nous ne considérons ici que le calcul numérique sans nous préoccuper d'aucune façon de la théorie. Il vient alors dans les formules (11) et (12) une très grande simplification. Les valeurs de

$$\frac{\pi u_3}{\omega_1}$$

sont, dans tous les cas que nous rencontrerons extrêmement petites (et aussi par conséquent les valeurs de q^2). Nous en indiquerons les raisons à mesure que nous rencontrerons ces valeurs dans la suite. Aussi les deux termes des formules précédentes se réduisent-elles, sans aucune erreur appréciable à leur premier terme. (Les valeurs de chacun des termes des deux formules sont au plus de l'ordre de l'unité : Nous avons fait tous les calculs avec cinq décimales et nous avons toujours constaté que, à partir du terme en q^4 compris, dans les deux sommes tous les termes étaient nuls du moins jusqu'à la cinquième décimale). Aussi nous emploierons toujours, dans le cas qui nous intéresse, les formules suivantes, approchées, mais avec une erreur absolument négligeable :

$$\zeta(u) \sim \frac{\eta_1 u}{\omega_1} + \frac{\pi}{2\omega_1} \cotg \frac{\pi u}{2\omega_1} + \frac{2\pi q^2}{(1-q^2)\omega_1} \sin \frac{\pi u}{\omega_1} \quad (13)$$

$$p(u) \approx -\frac{\eta_1}{\omega_1} + \frac{\pi^2}{4\omega_1^2} \frac{1}{\sin^2 \frac{\pi u}{2\omega_1}} - \frac{2\pi^2 q^2}{(1-q^2)\omega_1^2} \cos \frac{\pi u}{\omega_1} \quad (14)$$

Nous allons voir ce que donnent ces formules lorsque la variable u est imaginaire ($\frac{\pi u}{2\omega_1} = x+iy$) pour réduire au minimum les calculs numériques.

Nous avons :

$$\begin{aligned} \cotg \frac{\pi u}{2\omega_1} &= \frac{\cos(x+iy)}{\sin(x+iy)} = \frac{\cos x \cos iy - \sin x \sin iy}{\sin x \cos iy + \cos x \sin iy} = \frac{\cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y}{\sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y} \\ &= \frac{(\sin x \operatorname{ch} y - i \cos x \operatorname{sh} y)(\cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y)}{\sin^2 x \operatorname{ch}^2 y + \cos^2 x \operatorname{sh}^2 y} \\ &= \frac{\sin x \cos x (\operatorname{ch}^2 y - \operatorname{sh}^2 y) - i \operatorname{sh} y \operatorname{ch} y (\cos^2 x + \sin^2 x)}{\operatorname{ch}^2 y - \cos^2 x (\operatorname{ch}^2 y - \operatorname{sh}^2 y)} \\ &= \frac{\sin x \cos x - i \operatorname{sh} y \operatorname{ch} y}{\operatorname{ch}^2 y - \cos^2 x} = \frac{\sin 2x - i \operatorname{sh} 2y}{\operatorname{ch} 2y - \cos 2x} \end{aligned}$$

Notons aussi la formule dont nous aurons à nous servir par la suite :

$$\cotg \left(-\frac{\pi \bar{u}}{2\omega_1} \right) = \cotg (-x+iy) = \frac{\sin 2x + i \operatorname{sh} 2y}{\cos 2x - \operatorname{ch} 2y}$$

Nous avons de même sans difficulté :

$$\begin{aligned} \sin \frac{\pi u}{\omega_1} &= \sin (2x+2iy) = \sin 2x \cos 2iy + \cos 2x \sin 2iy \\ &= \sin 2x \operatorname{ch} 2y + i \cos 2x \operatorname{sh} 2y \\ \cos \frac{\pi u}{\omega_1} &= \cos (2x+2iy) = \cos 2x \cos 2iy - \sin 2x \sin 2iy \\ &= \cos 2x \operatorname{ch} 2y - i \sin 2x \operatorname{sh} 2y \\ \sin \left(-\frac{\pi \bar{u}}{\omega_1} \right) &= \sin (-2x+2iy) = -\sin 2x \operatorname{ch} 2y + i \cos 2x \operatorname{sh} 2y \\ \cos \left(-\frac{\pi \bar{u}}{\omega_1} \right) &= \cos (-2x+2iy) = \cos 2x \operatorname{ch} 2y + i \sin 2x \operatorname{sh} 2y \end{aligned}$$

Enfin il vient encore

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin^2 \left(\frac{\pi u}{2\omega_1} \right)} &= \frac{1}{\sin^2 (x+iy)} = \frac{1}{(\sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y)^2} = \frac{(\sin x \operatorname{ch} y - i \cos x \operatorname{sh} y)^2}{(\sin^2 x \operatorname{ch}^2 y + \cos^2 x \operatorname{sh}^2 y)^2} \\ &= \frac{\sin^2 x \operatorname{ch}^2 y - \cos^2 x \operatorname{sh}^2 y - 2i \sin x \cos x \operatorname{sh} y \operatorname{ch} y}{(\operatorname{ch}^2 y - \cos^2 x)^2} \\ &= \frac{\operatorname{ch}^2 y - \cos^2 x (\operatorname{ch}^2 y + \operatorname{sh}^2 y) - \frac{i}{2} \sin 2x \operatorname{sh} 2y}{(\operatorname{ch}^2 y - \cos^2 x)^2} = \frac{\frac{1}{2} [(1 + \operatorname{ch} 2y) - \operatorname{ch} 2y (1 + \cos 2x) - i \sin 2x \operatorname{sh} 2y]}{\left[\frac{1}{2} (1 + \operatorname{ch} 2y) - \frac{1}{2} (1 + \cos 2x) \right]^2} \\ &= 2 \frac{1 - \cos 2x \operatorname{ch} 2y - i \sin 2x \operatorname{sh} 2y}{(\operatorname{ch} 2y - \cos 2x)^2} \end{aligned}$$

à cause des formules :

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\operatorname{sh} 2y = 2 \operatorname{sh} y \operatorname{ch} y$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1$$

$$\operatorname{ch} 2y = \operatorname{ch}^2 y + \operatorname{sh}^2 y = 2 \operatorname{ch}^2 y - 1$$

$$\frac{1}{\sin^2\left(-\frac{\pi \bar{u}}{2\omega_1}\right)} = \frac{1}{\sin^2(-x+iy)} = 2 \frac{1 - \cos 2x \operatorname{ch} 2y + i \sin 2x \operatorname{sh} 2y}{(\operatorname{ch} 2y - \cos 2x)^2}$$

Lorsque u est imaginaire les deux formules (13) et (14) peuvent donc se mettre sous la forme :

$$(15) \quad \zeta(u) = \zeta\left[\frac{2\omega_1}{\pi}(x+iy)\right] \approx \frac{2\eta_1}{\omega_1}(x+iy) + \frac{\pi}{2\omega_1} \frac{\sin 2x - i \operatorname{sh} 2y}{\operatorname{ch} 2y - \cos 2x} + \frac{2\pi q^2(\sin 2x \operatorname{ch} 2y + i \cos 2x \operatorname{sh} 2y)}{(1-q^2)\omega_1}$$

$$(16) \quad p(u) = p\left[\frac{2\omega_1}{\pi}(x+iy)\right] \approx -\frac{\eta_1}{\omega_1} + \frac{\pi^2}{2\omega_1^2} \frac{1 - \cos 2x \operatorname{ch} 2y - i \sin 2x \operatorname{sh} 2y}{(\operatorname{ch} 2y - \cos 2x)^2} - \frac{2\pi^2 q^2(\cos 2x \operatorname{ch} 2y - i \sin 2x \operatorname{sh} 2y)}{(1-q^2)\omega_1^2}$$

TABLE des MATIERES

Pages

INTRODUCTION

Chapitre I - 1.- CALCUL DU POTENTIEL DE L'ECOLEMENT AUTOUR DE DEUX CERCLES INEGAUX, AVEC DES CIRCULATIONS DIFFERENTES

1-1 - Ecoulement autour d'un cercle	1
1-11 - Rappel succinct de la théorie générale	1
1-12 - Ecoulement autour d'un cercle	2
1-13 - La méthode des images	4
1-131 - Image d'un tourbillon	4
1-132 - Image d'un doublet	5
1-2 - Ecoulement autour de deux cercles	8
1-21 - Généralités	8
1-22 - Coordonnées bipolaires	9
1-23 - Ecoulement autour de deux cercles sans circulation	11
1-231 - Position des images du second doublet	12
1-232 - Position des images du premier doublet	15
1-233 - Valeur de l'intensité des doublets-images du second doublet	16
1-234 - Valeur de l'intensité des doublets-images du premier doublet	18
1-24 - Ecoulement autour de deux cercles inégaux affectés de circulation différente	19

Chapitre II- 2.- POTENTIEL DE LAGALLY POUR L'ECOLEMENT AUTOUR DE DEUX CERCLES

2-1 - Introduction - Position du problème	25
2-2 - Notations et Transformation conforme	25
2-3 - Potentiel de l'écoulement dans le plan du rectangle	28
2-4 - Calcul des circulations autour de chacun des cercles	30
2-5 - Etablissement du calcul numérique	30
2-6 - Remarque : Les deux cercles sont égaux	33

Chapitre III- 3.- TRANSFORMATION CONFORME DE DEUX CERCLES EN DEUX PROFILS D'AILE D'UN MEME PLAN

3-1 - Principe	37
3-2 - Cas d'une aile à fente arrière	38
3-3 - Calcul des efforts	42
3-31 - Efforts locaux	42
3-32 - Efforts globaux	43
3-321 - Calcul de la formule de Blasius	43
3-322 - Intégration des pressions locales	43
3-323 - Calcul des interactions des singularités	44

Chapitre IV - EXEMPLE NUMERIQUE	45
4.- AILE A FENTE AVANT	47
4-1 - Généralités	47
4-2 - Etude des transformations	47
4-3 - Calcul des vitesses, des pressions, des circulations et des sustentations théoriques	49
4-4 - Les expériences	51
4-5 - Comparaison entre la théorie et l'expérience	52
Conclusion	
Chapitre V - EXEMPLE NUMERIQUE	65
5.- BIPLAN A AILES EGALES. ETUDE DE L'INTERACTION-SOL	67
5-1 - Généralités	67
5-2 - Biplan	67
5-21 - Etude des transformations	68
5-22 - Calcul des vitesses, des pressions et des circulations	68
5-23 - Calcul de la sustentation théorique et de la résistance induite	71
5-3 - Etude de l'interaction-sol	76
5-31 - Position du problème	76
5-32 - Transformation conforme et potentiel de l'écoulement	76
5-33 - Résultats	77
5-4 - Conclusion générale du Chapitre	79
Chapitre VI - EXEMPLES NUMERIQUES	81
6 - AILE MURIE D'UN VOLET ARRIERE, A FENTE	83
6-1 - Transformation des deux profils	83
6-2 - Calcul des vitesses	89
6-21 - Détermination des paramètres des fonctions de transformation	89
6-22 - Détermination des vitesses dans le plan du rectangle	92
6-23 - Détermination des vitesses dans le plan des profils C_z globaux	93
6-3 - Conclusion	96
Appendice - NOTE SUR LE CALCUL NUMERIQUE DE CERTAINES FONCTIONS ELLIPTIQUES	101
1 - Existence de fonctions doublement périodiques	103
2 - Passage à des formules permettant le calcul numérique	106
3 - Etablissement du calcul numérique	107

DEUXIÈME THÈSE

Propositions données par la Faculté

CORRECTIONS DE LIMITATION DE VEINE EN COURANT PLAN ET
EN COURANT A TROIS DIMENSIONS

VU ET APPROUVÉ :
Paris, le 20 Avril 1950
Le Doyen de la Faculté des Sciences,
A. CHATELET

VU ET PERMIS D'IMPRIMER :
Le Recteur de l'Académie de Paris,
J. SARRAILH

Imp. Servant-Crouzet
II, Av. de Vaugirard-Nouveau
Paris 15ème